

DAVID GUENJI TAKEMURA

**DETERMINAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE OFERTA
NO MERCADO DE ENERGIA ATRAVÉS DE
OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS**

FLORIANÓPOLIS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**DETERMINAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE OFERTA
NO MERCADO DE ENERGIA ATRAVÉS DE
OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

DAVID GUENJI TAKEMURA

Florianópolis, Setembro de 2007.

DETERMINAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE OFERTA NO MERCADO DE ENERGIA ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS

David Guenji Takemura

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Potência*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Roberto de Souza Salgado, Ph. D.
Orientador

Katia Campos de Almeida, Ph. D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Roberto de Souza Salgado, Ph. D. (EEL/UFSC)
Orientador

Katia Campos de Almeida, Ph.D. (EEL/UFSC)
Co-orientadora

Hans Helmut Zürn, Ph. D. (EEL/UFSC)

Antônio José Alves Simões Costa, Ph. D. (EEL/UFSC)

Erlon Cristian Finardi, Dr. Eng. (EEL/UFSC)

Para meus pais, Daniel e Keiko...

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Roberto de Souza Salgado, por todos os conselhos, liberdade e suporte que me proporcionou durante este trabalho.

À minha co-orientadora Katia Campos de Almeida, e aos membros da banca examinadora pelas valiosas contribuições.

A todos os professores do Labspot e Labplan, por esses dois anos de intenso aprendizado.

Aos meus colegas de laboratório, pelos momentos de descontração e por estarem sempre dispostos a me ajudar.

À minha irmã Celina Maki Takemura, Bruna Kruczewski e Ebrahim Samer El'Youssef, por todo apoio.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Muito Obrigado!

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**DETERMINAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE OFERTA NO
MERCADO DE ENERGIA ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO EM
DOIS NÍVEIS**
David Guenji Takemura

Setembro/2007

Orientador: Roberto de Souza Salgado

Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Palavras-chave: Otimização em Dois Níveis, Estratégia de Oferta, Método de Pontos Interiores, Método de Descida, Equilíbrio de Nash.

Número de Páginas: xiii + 82

O objetivo desta dissertação é estudar os efeitos econômicos e operativos das estratégias de oferta no mercado de energia elétrica de curto prazo. A determinação da estratégia de oferta por um participante do mercado pode ser modelada como um problema de otimização em dois níveis. O participante do mercado deseja maximizar seu benefício individual, sujeito ao fato de que o operador do sistema determina o despacho dos participantes de forma imparcial, maximizando o benefício social.

O programa computacional implementado para resolver o problema de otimização em dois níveis se baseia nos Métodos de Descida. O problema de otimização do operador é solucionado através do Método Primal-Dual de Pontos Interiores. Através de informações dessa solução, o participante do mercado pode encontrar a oferta mais adequada no sentido de maximizar seu benefício individual. Em termos de modelagem analítica, a rede elétrica é representada por equações não lineares e a carga de determinados consumidores pode ser usada como variável de otimização. Desde que os outros participantes do mercado podem utilizar estratégias de oferta, isto resulta num jogo de ofertas não cooperativo. Por esta razão, o algoritmo de Equilíbrio de Nash é utilizado para determinar um ponto de equilíbrio entre os participantes.

Os resultados numéricos obtidos mostram que é possível maximizar o benefício individual através de uma oferta estratégica e também trazer benefícios para os outros participantes do mercado. Também é observado que esta oferta tem um impacto significativo no ponto de operação do sistema, podendo ser não favorável a consumidores que possuem uma demanda inelástica. Para os casos estudados, foram encontrados pontos de equilíbrio para os jogos de oferta.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

Determination of Strategic Bids in Electricity Markets Through Bilevel Optimization

David Guenji Takemura

September/2007

Advisor: Roberto de Souza Salgado

Area of Concentration: Power Systems

Key words: Bilevel Optimization, Strategic Bidding, Interior Point Method, Descent Method, Nash Equilibrium.

Number of Pages: xiii + 82

This work aims at studying the economic and operating aspects of the strategic bids in the short term electricity market. The determination of the strategic bid of a market participant can be modelled as a bilevel optimization problem. The objective of the market participant is the maximization of his own individual benefit, but taking into account that the system operator determines the power dispatch impartially, aiming at maximizing the social benefit.

The computational program used to solve the mentioned bilevel optimization problem is based on Descent Methods whereas the solution of the power dispatch problem is obtained through the Primal-Dual Interior Point Method. The information provided for this solution is used by the participant to determine the most suitable bid in the sense of maximizing his individual benefit. In terms of modelling, the power network is represented by nonlinear steady state power equations, and the power demand of specific consumers is used as optimization variables. Since it is also possible for the other participants to make strategic bids, this leads to a non-cooperative bid game. For this reason, the Nash Equilibrium algorithm is used to find the equilibrium point between the participants.

The numerical results obtained from the application of the bilevel strategy show that it is possible to maximize the individual benefit through a suitable strategic bid, which can also bring benefits for the other market participants. It is also observed that this bid has a considerable effect on the power system operation, and could be unsuitable for consumers with inelastic demand. Nash Equilibrium points were found in all cases studied.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Mercado de Energia Elétrica	1
1.1.1	Reestruturação do Setor Elétrico	1
1.1.2	Benefício Social	3
1.1.3	Ofertas Estratégicas	3
1.2	Objetivos Gerais	5
1.3	Estrutura do Trabalho	5
2	Problema de Otimização em Dois Níveis	7
2.1	Introdução	7
2.2	Conceitos Preliminares	8
2.2.1	Exemplos de Aplicações	9
2.2.2	Exemplo Numérico de um Problema Linear	11
2.3	Técnicas de Solução	13
2.3.1	Métodos de Substituição do Problema de Nível Inferior	14
2.3.2	Métodos de Descida	17
2.4	Conclusão	18
3	Maximização do Benefício Social e Individual	19
3.1	Introdução	19

3.2	Fluxo de Potência Ótimo	19
3.3	Maximização do Benefício Social	20
3.3.1	Custo de Geração de Potência Ativa	21
3.3.2	Modelagem da Função Benefício de Potência Ativa do Consumidor	22
3.3.3	Modelagem da Demanda de Potência	23
3.3.4	Solução do Problema de Maximização do Benefício Social	24
3.4	Maximização do Benefício Individual	27
3.4.1	Formulação do Problema de Otimização em Dois Níveis	27
3.4.2	Solução do Problema de Otimização em Dois Níveis	29
3.4.3	Determinação dos Tensores	32
3.4.4	Algoritmo de Maximização do Benefício Individual (AMBI)	34
3.5	Equilíbrio de Nash	35
3.5.1	Algoritmo de Busca do Equilíbrio de Nash (ABEN)	35
3.6	Conclusão	36
4	Simulações e Resultados Numéricos	37
4.1	Introdução	37
4.2	Considerações Iniciais	37
4.3	Sistema de 2 Barras	38
4.3.1	Maximização do Benefício Social	38
4.3.2	Maximização do Benefício Individual dos Participantes	40
4.3.3	Competição entre G1 e G2	46
4.3.4	Competição entre G1 e C2	47
4.4	Sistema de 30 Barras do IEEE	50
4.4.1	CASO A: Controle sobre o Gerador G1	51
4.4.2	CASO B: Controle sobre os Geradores G1, G2, e Carga C30	59
4.4.3	CASO C: Equilíbrio de Nash entre G1 e G2	67
4.5	Conclusão	69

5	Considerações Finais	70
5.1	Introdução	70
5.2	Conclusões	70
5.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	71
A	Método Primal-Dual de Pontos Interiores	73
B	Dados do Sistema de 30 Barras	78
	Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

2.1	Região factível do problema linear.	11
2.2	Avaliação de alguns pontos do problema linear.	12
2.3	Se o líder escolher $x = 3$, o seguidor responde com $y = 2,5$	13
2.4	Soluções encontradas para cada abordagem de otimização.	14
3.1	Gráficos de custo do gerador.	22
3.2	Gráficos de benefício do consumidor.	23
3.3	Variação de oferta para geração e para carga	28
4.1	Sistema de 2 barras (Weber e Overbye, 1999).	38
4.2	Curva de benefício de G1 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras. .	41
4.3	Comportamento da carga do sistema de 2 barras.	42
4.4	Curva de custo e recebimento de G1.	42
4.5	Curva de benefício de G2 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras. .	43
4.6	Curva de benefício de C2 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras. .	44
4.7	Curva de pagamento e benefício de carga de C2.	45
4.8	Equilíbrio de Nash entre G1 e G2	47
4.9	Equilíbrio de Nash entre G1 e C2	49
4.10	Sistema de 30 barras do IEEE.	50
4.11	Curva de benefício de G1 e iterações do AMBI para o sistema de 30 barras.	52
4.12	Tensão e ângulo das barras do sistema de 30 barras - Caso A.	55

4.13	Potência ativa e reativa dos geradores do sistema de 30 barras - Caso A. . .	56
4.14	Carga dos consumidores ativos no sistema de 30 barras - Caso A.	57
4.15	Custo marginal de potência ativa - Caso A.	58
4.16	Tensão e ângulo das barras do sistema de 30 barras - Caso B.	63
4.17	Potência ativa e reativa dos geradores do sistema de 30 barras - Caso B. . .	64
4.18	Carga dos consumidores ativos no sistema de 30 barras - Caso B.	65
4.19	Custo marginal de potência ativa - Caso B.	66
4.20	Determinação do Equilíbrio de Nash.	68

Lista de Tabelas

4.1	Coeficientes de custos e benefícios reais do sistema de 2 barras.	39
4.2	Maximização do benefício social para o sistema de 2 barras.	39
4.3	Maximização do benefício individual de G1.	43
4.4	Maximização do benefício individual de G2.	43
4.5	Maximização do benefício individual de C2.	45
4.6	Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e G2.	46
4.7	Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e C2.	48
4.8	Custos e benefícios reais do sistema de 30 barras.	50
4.9	Comparação entre os resultados do AMBS e AMBI - Caso A.	53
4.10	Contabilização do benefício do gerador G1 - Caso A.	54
4.11	Maximização do Benefício Social (AMBS) - Caso A.	54
4.12	Maximização do Benefício Individual de G1 (AMBI) - Caso A.	54
4.13	Comparação entre os resultados do AMBS e AMBI - Caso B.	60
4.14	Contabilização do benefício do gerador G1 - Caso B.	61
4.15	Contabilização do benefício do gerador G2 - Caso B.	61
4.16	Contabilização do benefício da carga C30 - Caso B.	62
4.17	Maximização do Benefício Social (AMBS) - Caso B.	62
4.18	Maximização do Benefício Individual de G1, G2 e C30 (AMBI) - Caso B. .	62
4.19	Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e G2 (ABEN) - Caso C.	67

B.1	Dados de Linha do Sistema-Teste de 30 Barras.	79
B.2	Dados de Barra do Sistema-Teste de 30 Barras.	80
B.3	Dados de Limites e Oferta do Sistema-Teste de 30 Barras.	80

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Mercado de Energia Elétrica

Os antigos modelos de mercado de energia elétrica foram caracterizados pela existência de monopólios verticalizados (empresas que realizam atividades de geração, transmissão e distribuição simultaneamente), preços baseados em custos e interferência política na regulação. Nesses modelos, as aplicações de recursos não eram transparentes e a entrada de novos agentes no mercado não era atrativa. Além disso, numa condição onde predominava o monopólio, havia pouco incentivo à eficiência econômica.

1.1.1 Reestruturação do Setor Elétrico

Desde o início dos anos 90, os sistemas elétricos de vários países, inclusive o do Brasil, vêm sendo reestruturados, de forma a substituir o tradicional monopólio do mercado de energia por um modelo de competição justa para atrair novos investimentos, propiciar modicidade das tarifas e melhorar a eficiência econômica.

O processo de reestruturação tem quatro premissas fundamentais:

1. Desverticalização das empresas de energia elétrica:

No modelo antigo, era comum encontrar empresas que realizavam simultaneamente as atividades de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. Nessa situação de monopólio, era difícil identificar a aplicação de recursos. Com a desverticalização dessas empresas, ou seja, com a criação de empresas especializadas em geração, transmissão e distribuição operando separadamente, seria possível criar um mercado competitivo para a comercialização da energia, tornando mais eficaz o controle de custos e o estabelecimento de padrões de produtividade independentes para as atividades de geração, transmissão e distribuição.

2. Criação de um Ambiente de Competição:

Foi criado o conceito de consumidor livre, o qual pode escolher a empresa fornecedora de energia, de maneira que, para conseguir competir, cada empresa deveria estudar ações de aumento de produtividade e redução de custos, de forma a atrair consumidores.

3. Livre Acesso ao sistema de transmissão:

Para que houvesse uma competição justa, era necessário que as empresas proprietárias de ativos de transmissão oferecessem livre acesso a todos os agentes do mercado de forma não discriminatória.

4. Mudança do Papel do Estado:

Uma vez que os governos Estadual e Federal tinham uma capacidade de financiamento limitada, o Estado mudaria seu papel de empreendedor para regulador, deixando a iniciativa privada assumir a função de expandir o sistema elétrico.

Dentro dessas mudanças inclui-se também a criação de mecanismos para geradores e, às vezes grandes consumidores, comercializarem abertamente energia no sistema.

Para o funcionamento adequado do sistema de energia elétrica, foram criados agentes com funções específicas. No Brasil, os principais agentes que atuam no sistema elétrico atualmente (Silva, 2001) são citados abaixo, juntamente com suas funções.

EPE *Empresa de Pesquisa Energética*

Execução de estudos para definição da Matriz Energética e planejamento da expansão do setor elétrico (geração e transmissão).

ONS *Operador Nacional do Sistema Elétrico*

Coordenação e controle da operação da geração e da transmissão no Sistema Interligado Nacional (SIN).

CCEE *Câmara de Comercialização de Energia Elétrica*

Administração de contratos, liquidação do mercado de curto prazo, leilões de energia.

ANEEL *Agência Nacional de Energia Elétrica*

Regulação e fiscalização, zelando pela qualidade dos serviços prestados, universalização do atendimento e pelo estabelecimento de tarifas para consumidores finais, preservando a viabilidade econômica e financeira dos Agentes de Comercialização.

Idealmente, a estrutura e as regras do mercado de energia seriam suficientemente bem formuladas de maneira que a operação do sistema se direcionasse para a maximização do benefício social (ver a seção 1.1.2), não deixando brechas para que jogadas estratégicas, que

distorcessem a operação e o preço da energia, pudessem ser exploradas. Entretanto, algumas características do sistema elétrico, como número limitado de geradores, alto investimento inicial, limites de transmissão que isolam consumidores do alcance de geradores, perdas de transmissão e limites operacionais, podem tornar o mercado de competição ideal em oligopólio. Todas essas características tornam possível que apenas poucas empresas geradoras atendam uma dada região e, dessa maneira possam utilizar estratégias de ofertas para maximizar seus próprios lucros.

1.1.2 Benefício Social

A performance do mercado de energia é medida pela noção econômica do termo benefício social. Benefício social é a combinação do custo da "*commodity*", no caso a energia, e o benefício da "*commodity*" para a sociedade, medido pela disposição que o consumidor tem de pagar pela energia. Se a demanda de energia é independente do preço, ou seja, se a demanda tiver elasticidade de preço zero, então o benefício social é simplesmente o valor negativo do custo da energia. Um mercado ideal maximiza o benefício social, porém mercados reais sempre operam abaixo dos níveis máximos de benefício social. A diferença no benefício social de um mercado ideal e um mercado real é uma medida da ineficiência do mercado real (David e Wen, 2000).

1.1.3 Ofertas Estratégicas

Entende-se por estratégia de oferta, aquela em que o participante do mercado de energia envia ao operador do sistema uma oferta diferente do seu custo de produção ou benefício de carga real, de forma a obter um lucro maior. O operador é imparcial, e portanto não favorece a performance de nenhum participante em particular, mas tem como objetivo a otimização da performance do sistema como um todo.

Sob condições de competição perfeita, a teoria de microeconomia mostra que uma das estratégias ótimas de oferta para geradores é simplesmente submeter ao operador seus próprios custos incrementais. Quando um gerador submete uma oferta diferente do seu custo incremental, em um esforço para explorar imperfeições no mercado e aumentar seus lucros, este comportamento é chamado de estratégia de oferta. Se o gerador consegue aumentar seu lucro através da estratégia de oferta, diz-se que este gerador possui poder de mercado. Os sistemas elétricos atuais não são idealmente competitivos e, como resultado, um gerador pode aumentar seus lucros usando estratégias de oferta, ou seja, exercendo poder de mercado (David e Wen, 2000).

Então, teoricamente, sob condições de perfeito equilíbrio competitivo, os participantes ofertam seus próprios custos incrementais ou um valor muito próximo aos custos incremen-

tais. Na realidade, entretanto, ocorrem situações em que os participantes podem se aproveitar de oportunidades para ofertar um valor bem diferente dos custos incrementais. Por exemplo, a manutenção programada de uma unidade geradora de grande porte no sistema pode resultar numa situação onde a geração é escassa. Nessa situação, os participantes que possuem uma capacidade de geração excedente podem explorar o mercado ofertando sua energia por um preço alto (Lamont e Rajan, 1997).

Uma outra situação crítica apontada em Weber e Overbye (2002) pode ocorrer quando um participante, proprietário de duas ou mais unidades geradoras, propositalmente induz congestionamentos na rede de transmissão, de forma a causar um ilhamento em determinada parte do sistema em que está localizada uma de suas unidades geradoras. Dentro dessa ilha o participante estaria livre para definir seu preço.

Neste trabalho, os agentes de operação, mercado e regulação serão tratados como uma única entidade, chamada Operador Independente do Sistema (ou simplesmente Operador), de forma a sintetizar o estudo. Assim, existem duas razões importantes para se investigar as estratégias de oferta (David e Wen, 2000):

1. Pelo lado dos participantes do mercado: verificar o potencial para aumentar seus lucros. O índice de desempenho de cada participante é chamado de benefício individual, e será tratado nas seções seguintes.
2. Pelo lado do Operador: identificar o potencial para abuso dos participantes do mercado, através de falhas que podem ser exploradas nas regras e estruturas de mercado. O índice de desempenho para o operador é o benefício social.

Na literatura, já é possível encontrar um número considerável de produções envolvendo estratégias de oferta. No entanto, o assunto vem sendo estudado recentemente, e a maior parte das publicações datam desta última década.

Em David e Wen (2001) e Borenstein e Bushnell (2000) são apresentadas as origens do poder de mercado no sistema elétrico desregulamentado. São reunidas também evidências de que o poder de mercado tem sido exercido em alguns países, e é feita uma análise sobre o equilíbrio nesses mercados oligopolísticos. David e Wen (2000) tratam especificamente das estratégias de oferta, mostrando um panorama geral dos tipos de estratégias, e do funcionamento dos leilões e protocolos de ofertas.

Em Lamont e Rajan (1997) é proposta uma estratégia de oferta *sub-ótima*, no sentido de que o participante do mercado não possui informações precisas sobre os seus concorrentes. O participante determina sua oferta baseado em uma noção do comportamento do seu concorrente, modelado como uma função de densidade de probabilidade.

Barroso et al. (2006), estudam as ofertas estratégicas e o *Equilíbrio de Nash* para o despacho econômico do sistema elétrico brasileiro. É considerado o modelo do sistema em barra única, funções de custo lineares e informações perfeitas do comportamento dos concorrentes.

Um modelo mais sofisticado, considerando a rede do sistema é apresentado em Weber e Overbye (1999). Esta abordagem envolve uma modelagem em dois níveis, considerando perdas de transmissão, e funções quadráticas de custo de geradores e benefício de consumidores. É também suposto que o participante possui informações perfeitas do comportamento dos concorrentes.

1.2 Objetivos Gerais

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo investigar dois assuntos recentes no sistema elétrico: as estratégias de oferta no mercado de energia e os problemas de otimização em dois níveis. Para isso, será desenvolvido um algoritmo que determina a melhor oferta para uma determinada entidade no sistema elétrico sujeito ao despacho determinado pelo operador do sistema. A estrutura deste problema é representada por dois níveis hierárquicos de decisão, a entidade e o operador.

Será considerado o modelo completo, não linear, da rede do sistema. A reação do consumidor também será modelada, através de uma função de benefício de consumo de carga. O método de pontos interiores será utilizado para garantir a factibilidade das soluções.

Com a conclusão do algoritmo, as simulações poderão indicar os efeitos das estratégias de oferta para a operação do sistema, e para todos os participantes do mercado de energia. Espera-se que esta ferramenta possa ser usada tanto para melhorar o benefício econômico de uma determinada entidade quanto como auxílio ao agente regulador do sistema, de forma a identificar e moderar o poder de mercado dos participantes através de medidas reguladoras, como a limitação do valor das ofertas ("*price caps*"), ou a determinação da expansão do sistema de transmissão.

1.3 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 2 Neste capítulo é abordado o problema de otimização em dois níveis. Os conceitos básicos e um exemplo ilustrativo são apresentados de forma a diferenciar os problemas de otimização clássico, multi-objetivo e multinível. São apresentados alguns métodos utilizados atualmente para solucionar o problema em dois níveis. Os

métodos de substituição do problema de nível inferior pelas suas condições de KKT são abordados, porém a técnica escolhida para este trabalho encontra-se na classe dos métodos de descida, que envolvem um número menor de variáveis.

Capítulo 3 Este capítulo é dividido em três seções principais:

- *Maximização do Benefício Social*: Aqui são modeladas as funções de custo dos geradores e benefício dos consumidores. É definido também o comportamento da carga, que deve manter o fator de potência constante. Por fim, o problema de maximização do benefício social é formulado e solucionado.
- *Maximização do Benefício Individual*: Nesta parte do capítulo, o problema de otimização em dois níveis para maximização do benefício individual é formulado e solucionado.
- *Equilíbrio de Nash*: Nesta parte do capítulo, é abordado o conceito de equilíbrio de Nash, importante no caso em que os participantes competem entre si para maximizar seus lucros individuais. É apresentado também um algoritmo baseado no uso do algoritmo de maximização do benefício individual para encontrar o equilíbrio de Nash para um dado sistema.

Capítulo 4 Neste capítulo os algoritmos implementados nesta dissertação são aplicados em dois sistemas:

- Sistema teste de 2 barras;
- Sistema teste de 30 barras.

Capítulo 5 Neste capítulo são feitas as conclusões finais a respeito da dissertação, dos programas implementados e dos resultados obtidos. Por fim, são sugeridas algumas melhorias no trabalho realizado e apresentadas algumas idéias para trabalhos futuros, esboçadas no decorrer da dissertação.

Capítulo 2

Problema de Otimização em Dois Níveis

2.1 Introdução

O processo de solução de um problema de otimização tradicional consiste em encontrar valores para as variáveis do problema, respeitando as restrições de igualdade e desigualdade, de forma a obter o melhor resultado possível para um único objetivo específico. Neste caso, supõe-se que todos os agentes afetados pela solução obtida estão de acordo com o critério sendo otimizado; ou seja, todos possuem o mesmo objetivo.

Um problema multi-objetivo visa encontrar um compromisso simultâneo entre vários objetivos. Estes objetivos podem pertencer a entidades diferentes e, portanto, podem ser independentes ou até conflitantes. Porém, quem toma as decisões deste problema é um mediador imparcial que tem um compromisso com todas as entidades. Nessa situação, uma solução é ótima somente se, a partir dela, uma melhora em um dos objetivos significa a deterioração dos demais objetivos.

Assim como o problema multi-objetivo, o problema multinível também envolve vários agentes com objetivos independentes e até conflitantes. Entretanto, no problema multinível não há um mediador, as entidades tomam suas próprias decisões de acordo com os seus objetivos. As variáveis de decisão do problema estão divididas ou são compartilhadas entre as entidades.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos teóricos básicos e uma revisão das aplicações práticas da otimização em dois níveis, de forma a fortalecer o entendimento do problema. As principais dificuldades em relação à solução do problema serão apontadas, bem como as técnicas usadas atualmente para superar essas dificuldades.

2.2 Conceitos Preliminares

O problema de otimização em dois níveis é um caso específico da otimização multinível, o qual pode ser visto como um modelo matemático do jogo líder-seguidor, em que o controle das variáveis de decisão é dividido entre os dois jogadores, que procuram otimizar suas respectivas funções objetivo. Na estratégia básica do jogo líder-seguidor, proposta originalmente por Stackelberg, a jogada é sequencial e não cooperativa (Edmunds e Bard, 1991). O líder é o primeiro jogador e conhece o objetivo do seguidor, que pode ou não conhecer o objetivo do líder, mas conhece a estratégia escolhida pelo líder e com isso define sua própria estratégia. O líder antecipa as reações do seguidor e leva isso em conta para definir sua ação.

Este tipo de jogo *líder-seguidor* pode ser usado para modelar uma diversidade de sistemas hierárquicos em que duas entidades autônomas tomam decisões da maneira prescrita. Aplicações de otimização em dois níveis podem ser encontradas em áreas como regulação governamental, controle descentralizado, comportamento de mercado e planejamento de sistemas de transporte (Colson et al., 2005; Fortuny-Amat e MacCarl, 1981). Algumas dessas aplicações serão descritas com maior detalhe na seção 2.2.1.

O problema de otimização em dois níveis pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{y}}{\text{Minimizar}} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x} representa as variáveis de decisão do nível superior e \mathbf{y} representa as variáveis de decisão do nível inferior. No nível superior, a função objetivo $F(\cdot, \cdot)$ e as restrições de desigualdade representadas pelo vetor $\mathbf{H}(\cdot, \cdot)$ dependem das variáveis \mathbf{y} , determinadas no nível inferior. A função objetivo $f(\cdot, \cdot)$, e as restrições de igualdade representadas pelo vetor $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$ e de desigualdade representadas pelo vetor $\mathbf{h}(\cdot, \cdot)$ do nível inferior, dependem das variáveis \mathbf{x} , determinadas no nível superior.

Além da existência de uma estrutura hierárquica, todas as situações de tomada de decisão e/ou planejamento em que a abordagem multinível é adequada, possuem as seguintes características:

1. Existem dois ou mais Agentes Decisores (AD's) envolvidos no processo, com objetivos independentes e às vezes conflitantes, no mesmo nível ou em níveis diferentes na hierarquia.
2. Cada AD pode exercer controle direto apenas sobre certas variáveis.

3. O processo de tomada de decisão é feito em dois estágios sequenciais: no primeiro estágio o AD do nível superior anuncia seu plano de ação; no segundo estágio, o AD do nível inferior reage racionalmente ao plano posto em ação pelo AD do nível superior. Isto significa que o plano anunciado pelo AD no nível superior é tratado como um dado externo, e o AD do nível inferior otimiza independentemente seu plano de ação de acordo com seus objetivos e limitações, sem levar em conta os objetivos do AD do nível superior.
4. O problema do AD do nível superior, é escolher um plano de ação que otimiza seu objetivo sujeito à reação racional do AD do nível inferior.
5. Não há incertezas envolvidas no processo de tomada de decisão. Em princípio, o AD do nível superior conhece a função objetivo e as restrições do nível inferior. O AD do nível inferior não precisa necessariamente conhecer os objetivos do nível superior, apenas a estratégia anunciada por ele.

2.2.1 Exemplos de Aplicações

Conforme mencionado anteriormente, o problema de otimização em dois níveis pode ser encontrado em vários processos de tomada de decisão. Nos parágrafos abaixo são apresentadas versões do problema em dois níveis no contexto de política econômica, sistemas de pedágio e ameaça terrorista.

No primeiro exemplo de aplicação, o governo determina certos objetivos a serem atingidos durante o período de planejamento. Para atingir seus objetivos o governo pode usar certas medidas políticas, como a aplicação de impostos e subsídios. Uma vez que a medida política é anunciada, o setor privado reage à política do governo, formando um plano de ação. Entretanto, este plano de ação do setor privado pode não corresponder às expectativas do governo. Além disso, a reação do setor privado, junto com as medidas políticas escolhidas pelo governo, irão determinar o grau de sucesso dos objetivos econômicos do governo. Em qualquer problema desta natureza, e de forma geral em um problema de política econômica em que os objetivos do governo estão pelo menos em conflito parcial com os objetivos do setor privado, os políticos se defrontam com um problema de otimização cujas restrições são problemas de otimização das indústrias e dos consumidores. Para ilustrar esta situação, seja o exemplo mostrado na referência (Fortuny-Amat e MacCarl, 1981), relativo a uma indústria leiteira. Considere que o objetivo particular dos políticos para este setor é a redução do uso de combustível importado. Para alcançar este objetivo, os políticos podem estabelecer impostos sobre o combustível importado e também subsidiar o uso industrial de energia produzida por fontes locais e/ou a instalação de certos processos de eficiência de energia (dispositivos de recuperação de calor, por exemplo). Uma vez que a estrutura detalhada dos

impostos e subsídios é anunciada pelo governo, a indústria estabelecerá o seu plano de produção. No final, o uso industrial de combustíveis importados pode aumentar, permanecer o mesmo ou reduzir. O fato de as indústrias reagirem de acordo com seus próprios objetivos para qualquer conjunto de medidas políticas, ignorando os objetivos da economia, força os políticos a utilizar uma estratégia tal que o uso de combustíveis importados é minimizado dado que as indústrias reagirão racionalmente de acordo com seus objetivos e limitações.

Em Colson et al. (2005) é apresentada a formulação do problema de pedágios em rodovias. Este problema surge de uma situação onde uma autoridade ou o dono de uma rede de rodovias pode definir o valor do pedágio relativo a um subconjunto de ligações da rede rodoviária. Levando em conta que os usuários da rede desejam minimizar o custo da viagem, uma taxa ótima de pedágio não terá um valor muito alto (de outra forma, os usuários podem ser dissuadiados a usar a infraestrutura) mas ainda assim será capaz de gerar uma receita alta. Uma vez que o proprietário da rede decide os valores do pedágio correspondentes a cada trecho rodoviário, os viajantes reagem a esses valores e escolhem seu itinerário, de tal modo que o custo total da viagem (levando em consideração o tempo, a distância e o preço do pedágio) é minimizado.

No setor elétrico, Arroyo e Galiana (2005) formulam o problema da ameaça terrorista. Neste contexto, considera-se que na análise de segurança em sistemas de potência, a introdução dos agentes destrutivos torna necessária ao operador a avaliação não apenas das tradicionais contingências aleatórias nos componentes do sistema, mas também um conjunto adicional de plausíveis atentados causados por terroristas. O objetivo geral do planejamento da operação é identificar o conjunto de contingências no qual o sistema fica mais vulnerável, de forma a implementar medidas de proteção e vigilância adequados. Para o terrorista, o objetivo é minimizar o número de componentes do sistema de potência a serem danificados de forma a causar uma interrupção de carga maior ou igual a um nível especificado. O objetivo do terrorista está sujeito a limitações nos seus recursos de destruição e à ação lógica do operador, que implementará todas as ações corretivas possíveis para minimizar o corte de carga no sistema.

A abordagem utilizada no presente trabalho, envolve as estratégias de oferta no mercado de energia elétrica. A metodologia aplicada baseia-se na formulação de Weber e Overbye (1999), na qual um indivíduo (conjunto de geradores e cargas controlados por uma única entidade) no mercado tenta maximizar seu benefício individual através da oferta enviada ao operador do sistema. O problema deste indivíduo está sujeito ao fato de que o operador do sistema reagirá à oferta recebida, determinando o preço da energia no sistema e os despachos de cada participante do mercado. Esta situação pode ser caracterizada como um problema de otimização em dois níveis.

2.2.2 Exemplo Numérico de um Problema Linear

Considere o problema (2.2), com função objetivo e restrições lineares, mostrado em Bard (1998), e modificado pela inclusão de uma restrição de desigualdade.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{x}{\text{Minimizar}} \quad F(x,y) = x - 4y \\ \text{sujeito a} \quad 1 \leq x \leq 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underset{y}{\text{Minimizar}} \quad f(y) = y \\ \text{sujeito a} \quad y \geq 0 \\ \quad \quad \quad -x - y \leq -3 \\ \quad \quad \quad -2x + y \leq 0 \\ \quad \quad \quad 2x + y \leq 12 \\ \quad \quad \quad -3x + 2y \leq -4 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

A região de soluções factíveis do problema (2.2) pode ser visualizada na Figura 2.1.

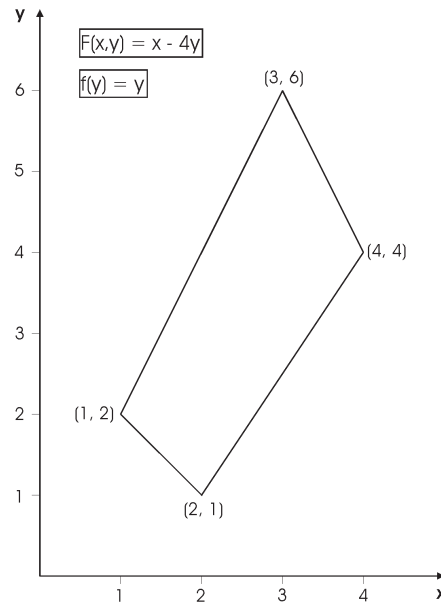


Figura 2.1: Região factível do problema linear.

Note que o líder, também denominado *agente decisor 1* (AD1), tem uma função objetivo $F(x,y)$, mas possui apenas poder de decisão sobre a variável x . Por outro lado, o seguidor, ou *agente decisor 2* (AD2), possui uma função objetivo $f(y)$ e controle sobre a variável y . O primeiro a tomar uma decisão é o líder, com a escolha pelo seguidor da sua melhor estratégia em resposta à ação do líder.

É possível verificar analiticamente que, conforme ilustrado na Figura 2.2, a melhor solução possível para o líder seria o ponto $(3,6)$, enquanto que a melhor solução factível para o

seguidor seria em $(2, 1)$.

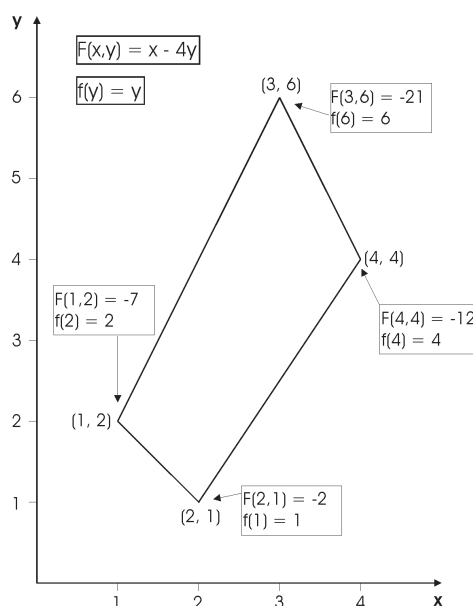


Figura 2.2: Avaliação de alguns pontos do problema linear.

O seguidor deseja minimizar y e portanto, se o líder escolhesse $x = 3$, o seguidor responderia com $y = 2,5$, resultando em $F(3; 2,5) = -7$, conforme mostra a Figura 2.3. Para qualquer valor de x escolhido pelo líder, o seguidor responderá com o valor mais baixo de y na região factível, de forma que o conjunto de soluções do problema em dois níveis está localizado na chamada *região de indução*, indicada na Figura 2.3.

Se o líder conhece o objetivo e as limitações do seguidor (e é o que se supõe), ele saberá qual será a reação do seguidor para cada valor de x escolhido. Assim, o líder conhece a região de indução, e seu problema é determinar o ponto desta região que minimiza sua função objetivo, $F(x, y)$. A solução ótima do problema em dois níveis pode ser determinada analiticamente e corresponde ao ponto $(4, 4)$ com $F(4, 4) = -12$.

Caso o líder não tivesse informação alguma sobre o objetivo do seguidor, poderia considerar a variável y como sendo constante. A estratégia escolhida pelo líder seria então minimizar x , e o ponto escolhido dentro da região factível seria $x = 1$. O seguidor reagiria então com $y = 2$, e o valor da função objetivo do líder seria então $F(1, 2) = -7$.

Estes resultados podem ser comparados com a solução do problema multi-objetivo. Na mesma região viável, um mediador imparcial deve escolher a solução que minimiza a soma das funções objetivo do líder e do seguidor. Analisando a Figura 2.2, o ponto mínimo de $F + f$ é $x = 3$ e $y = 6$. O conjunto de soluções encontradas é apresentado na Figura 2.4 e demonstra a diferença existente entre as diversas abordagens de otimização.

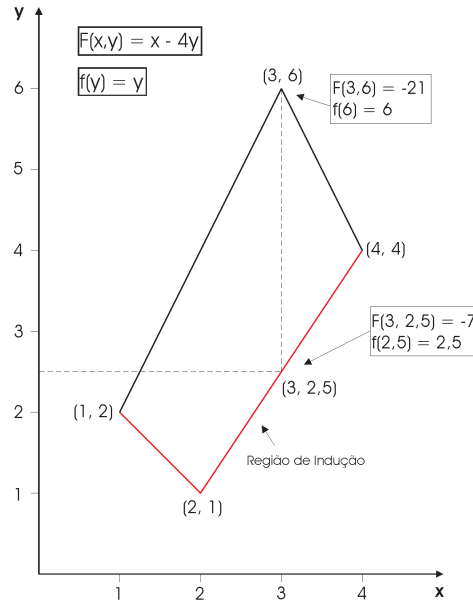


Figura 2.3: Se o líder escolher $x = 3$, o seguidor responde com $y = 2,5$.

2.3 Técnicas de Solução

Apesar de existirem muitas aplicações em que a modelagem em dois níveis é adequada, existem poucas implementações reais, devido principalmente à falta de algoritmos eficientes para lidar com problemas de grande escala (Colson et al., 2005). A maior parte das pesquisas de algoritmos de solução atuais são baseados nos casos mais simples de programação em dois níveis; ou seja, problemas envolvendo funções comportadas, com características lineares, quadráticas ou convexas. Entretanto, mesmo para o caso em que todas as funções do problema são lineares, Bard (1991) mostra que este problema é fortemente "NP-hard" ("Nondeterministic Polynomial-time hard"). De um modo simplificado, isto significa que o problema não pode ser resolvido por um algoritmo de tempo polinomial ("polynomial-time algorithm"). Entende-se por algoritmo de tempo polinomial aquele cujo tempo de execução computacional, $t(n)$, não é maior que uma função polinomial do tamanho do problema, n .

Os casos onde as funções F , \mathbf{H} , f , \mathbf{g} e \mathbf{h} do problema (2.1) são lineares, são tratados extensivamente na literatura. Para os casos onde F , \mathbf{H} , f , \mathbf{g} e \mathbf{h} são não-lineares e não-convexos, atualmente existem apenas poucos algoritmos que tratam o problema com algum grau de sucesso. Estes algoritmos se dividem em três classes (Falk e Liu, 1995):

1. Métodos que se baseiam na substituição do problema de nível inferior por suas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), transformando o problema de otimização em dois níveis em um problema de otimização não-convexo de um nível.
2. Métodos de dupla penalidade aproximando os problemas de nível inferior e superior

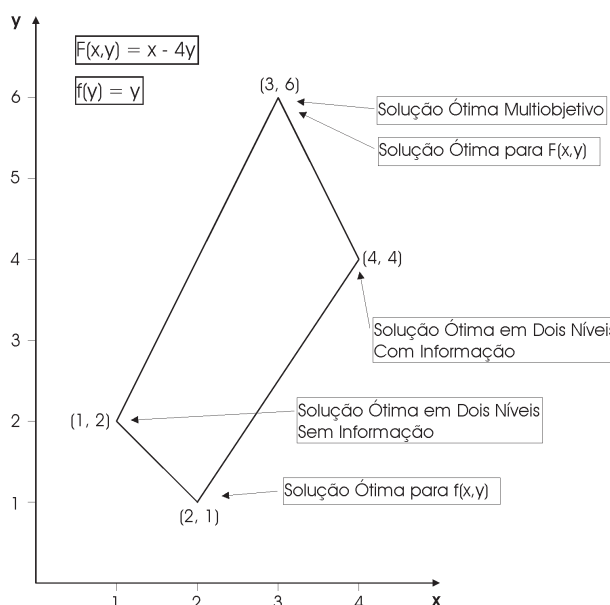


Figura 2.4: Soluções encontradas para cada abordagem de otimização.

através de sequências de problemas de otimização irrestritos das funções objetivos aumentadas e penalizadas.

3. Métodos de descida para o problema de nível superior com informações de gradiente do problema de nível inferior adquiridos de várias maneiras.

O algoritmo proposto neste trabalho encontra-se na terceira classe de metodologias de solução. Nas subseções a seguir, são destacadas as principais dificuldades e possíveis soluções relacionadas à classe de solução de um problema de otimização em dois níveis. Descrições detalhadas das técnicas fogem do enfoque deste trabalho. Estaremos particularmente interessados na primeira e terceira classe de algoritmos. De acordo com (Falk e Liu, 1995), os métodos baseados em penalidade apresentam convergência muito lenta, especialmente para problemas com acentuada não linearidade.

2.3.1 Métodos de Substituição do Problema de Nível Inferior

Apesar da escolha da primeira classe de solução ser a mais intuitiva, a aplicação das condições de otimalidade de KKT como restrições do problema de nível superior apresenta algumas complicações. As condições de KKT do problema de nível inferior são mostradas abaixo.

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \\ \pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (2.3)$$

onde a equação $\pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ é chamada de condição de folga complementar.

A solução do problema de nível inferior é dita não-degenerada se $\pi_i > 0$ quando $h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. A solução do problema em dois níveis é dita não-degenerada quando o problema de nível inferior é não-degenerado. O problema (2.1) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}} & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito a} & H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \\ & \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \\ & \pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (2.4)$$

As equações (2.4) formam um problema de otimização em um nível. Entretanto, este problema não pode ser resolvido com algoritmos clássicos que exploram as condições de KKT, pois o conjunto de equações

$$h_i(x, y) \leq 0, \quad h_{\pi_i}(\pi_i) \leq 0 \quad \text{e} \quad h_{\pi_i}(\pi_i) h_i(x, y) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

onde $h_{\pi_i}(\pi_i) = -\pi_i$, não satisfaz a condição de independência linear dos seus gradientes.

Para explicar esta condição, seja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ um ponto factível de (2.4); isto é,

$$\begin{aligned} \nabla h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), 0, 0]^t \\ \nabla h_{\pi_i}(\pi_i) &= [0, 0, 0, -1]^t \\ \nabla(\pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= [\pi_i \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \pi_i \nabla_{\mathbf{y}} h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), 0, h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^t \end{aligned} \quad (2.5)$$

Supondo $I = \{i | h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$. Então se $i \in I$, então $\nabla h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\nabla(\pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ são linearmente dependentes. Se $i \notin I$, então $\nabla h_{\pi_i}(\pi_i)$ e $\nabla(\pi_i h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ são linearmente dependentes. Portanto, o conjunto de restrições do problema (2.4) não satisfaz a condição de independência linear para qualquer valor que $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ possa assumir, tornando o problema muito complicado e difícil de se resolver.

Segundo Falk e Liu (1995), uma outra dificuldade desse tipo de abordagem vem do conhecido fato da teoria de programação paramétrica não-linear, de que mesmo que o problema

de nível inferior apresente propriedades altamente satisfatórias para cada y (por exemplo, convexidade da função objetivo, forte condição de suficiência de segunda ordem e condição de independência linear) o conjunto factível do problema será um arco definido pelas condições de KKT do nível inferior e geralmente não será diferenciável com relação à y . Esta característica pode influenciar seriamente a eficiência de um algoritmo não-linear baseado no uso do vetor gradiente.

Em Herskovits e Leontiev (2003), é proposto um algoritmo de pontos interiores em que as restrições $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$ do problema (2.4), são ignoradas na formulação inicial, verificando assim, a condição de independência linear das restrições. Um ponto interior $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi} \mid \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \text{ e } \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$ é escolhido para inicializar o algoritmo. As variáveis do problema são atualizadas através da soma de duas direções: uma direção de decréscimo da função objetivo e uma direção que aponta para o interior da região das soluções viáveis definidas pelas restrições do problema. O passo unidimensional é calculado de forma a respeitar as restrições $h(x, y) \leq 0$ e $\pi \geq 0$, ignoradas anteriormente, de forma que todas as restrições apresentadas em (2.4) seriam respeitadas. Entretanto, este algoritmo é aplicável apenas em problemas convexos no nível inferior. Além disso, casos onde $h(x, y)$ é extremamente não-linear dificultam a escolha do ponto inicial e a busca do passo unidimensional.

O algoritmo *Branch and Bound* é encontrado comumente na literatura (Colson et al., 2005; Edmunds e Bard, 1991; Fortuny-Amat e MacCarl, 1981). Neste algoritmo a condição de independência linear é alcançada eliminando-se a equação de folga complementar ($\pi_i h_i(x, y) = 0$) do problema (2.4), no chamado ramo principal da árvore. Em cada nó da árvore que não satisfaz a condição de folga complementar, é criada uma bifurcação, um caminho com $\pi_i = 0$ como restrição adicional, e outro caminho com $h_i(x, y) = 0$. A solução ótima destes problemas produz limites inferiores válidos para a correspondente sub-árvore.

Uma outra alternativa é resolver o problema (2.4) através de métodos de complementaridade não-linear (Torres, 2004). Neste método, as equações que representam as restrições de desigualdade ($h(x, y)$) são transformadas em igualdade pela adição de variáveis de folga (s); ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}}{\text{Minimizar}} & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ & \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ & s_i \pi_i = 0, i = 1, \dots, k \end{array} \right. \quad (2.6)$$

As equações de desigualdade ($\boldsymbol{\pi}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$) e folga complementar ($s_i \pi_i = 0$) de (2.6) são transformadas em uma única equação equivalente, $\psi(s, \boldsymbol{\pi})$, de forma que o problema (2.6)

pode ser reformulado como (2.7) e resolvido por métodos iterativos conhecidos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ \quad \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\pi} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \quad \psi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.3.2 Métodos de Descida

Este método se baseia na busca de uma direção de descida para $F(x, y)$. Supondo que y é uma função implícita de x , então $F(x, y(x))$ pode ser visto apenas em termos das variáveis de decisão do nível superior. Esta classe de algoritmos, aparentemente mais eficiente, supõe que o problema possui duas propriedades:

1. Para cada valor de x especificado, a solução do problema de nível inferior é única, de forma que y pode ser escrito como uma função implícita $y(x)$ de x .
2. $y(x)$ é continuamente diferenciável.

A função implícita $y(x)$ do problema pode não ser diferenciável em todos os pontos. Entretanto, supondo que o problema de nível inferior possui características ótimas de convergência (forte condição de suficiência de segunda ordem e condição de independência linear das restrições) $y(x)$ é diferenciável por partes e seu Jacobiano possui uma característica desejável. Os seus elementos, obtidos após a solução do problema de nível inferior, podem ser utilizados para a determinação de uma direção de busca do problema de nível superior.

Falk e Liu (1995) apresentam um método onde o decréscimo da função objetivo do nível superior é monitorado de acordo com informações subdiferenciais do problema de nível inferior. Este método é chamado de Algoritmo de Predominância do Líder ("*Leader Predominate Algorithm*").

O método de solução do problema de otimização em dois níveis empregado neste trabalho encontra-se na classe de solução dos métodos de descida. A escolha do método de descida se justifica principalmente quando a solução do problema de nível inferior já é conhecida, como é o caso do problema modelado no capítulo a seguir.

2.4 Conclusão

Do exposto neste capítulo, pode-se inferir que a Programação Multinível possui grande potencial para a formulação de problemas práticos. Uma variedade de problemas pode ser modelada, desde aqueles relacionados aos aspectos de decisão política até os que envolvem aspectos relativos aos sistemas de potência, o principal enfoque do presente trabalho.

O exemplo numérico apresentado, ilustra a considerável diferença entre as soluções dos problemas de otimização com apenas um nível e uma função objetivo, multinível e multi-objetivo.

Três classes principais de algoritmos de solução são encontradas na literatura, todas com um nível acentuado de dificuldade na solução do processo iterativo. Destas metodologias, um *Método de Descida*, principalmente em razão da sua simplicidade, foi escolhido para a aplicação estudada neste trabalho.

Capítulo 3

Maximização do Benefício Social e Individual

3.1 Introdução

Neste capítulo, o problema tradicional de FPO de minimização do custo de geração de potência ativa é modificado, de forma a incluir a reação do consumidor. Isto implica na adição de uma função de benefício de carga dos consumidores no índice de desempenho do problema original. O objetivo é o consumidor variar a sua carga em resposta às modificações do preço spot, de acordo com sua curva de benefício de carga. Esse problema é chamado de *Maximização do Benefício Social*. A seguir é tratado o problema de *Maximização do Benefício Individual*, no qual uma entidade, proprietária de um conjunto de geradores e cargas no sistema, tenta maximizar o seu lucro através das ofertas enviadas ao operador do sistema. O operador é quem determina os despachos de todos os participantes do mercado e portanto, a entidade em questão está em busca da solução de um problema de otimização em dois níveis. Finalmente, mostra-se como aplicar o algoritmo de Equilíbrio de Nash para o caso em que mais do que uma entidade tenta maximizar seu lucro através do problema de Maximização do Benefício Individual.

3.2 Fluxo de Potência Ótimo

O Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é um problema de otimização não linear, em que determinadas variáveis de controle são ajustadas para se otimizar uma função objetivo, respeitando restrições físicas e operacionais do sistema elétrico. Nos sistemas elétricos de potência, os objetivos a serem otimizados são, tipicamente: custo de geração de potência ativa,

desvio de potência ativa, perdas, custo de corte de carga, desvio de intercâmbio entre áreas, máximo carregamento e máxima transferência de potência.

As variáveis de controle devem ser escolhidas de forma coerente, de acordo com o tipo de estudo a ser conduzido. Os controles usualmente disponíveis são: geração de potência ativa e reativa, tensão em barras de geração, ângulo de defasamento de transformadores defasadores, potência de intercâmbio entre áreas, tap de transformadores e dispositivos shunt. Em geral, a carga do consumidor não é usada como elemento de controle, exceto no caso extremo de corte de carga, na qual a mesma é desconectada involuntariamente.

A ausência da carga como variável de controle é, em maior parte, devido à impossibilidade do operador do sistema de controlar direta ou indiretamente a mesma. Porém, nos últimos anos, tem havido um movimento no sentido de prover os consumidores com informações sobre o preço da energia através do mercado *spot*, dando a possibilidade dos mesmos de alterar o seu consumo, caso desejarem. Assim, a carga do consumidor se torna dependente do preço *spot*. E se a reação do consumidor ao preço da energia for de alguma forma modelada, a carga do consumidor pode se tornar uma variável de controle em potencial do FPO. Mais sobre este tipo de modelagem pode ser encontrado em da Costa (2002).

A teoria sobre mercado *spot* pode ser encontrada em Silva (2001). Um conceito importante é o preço *spot*, definido como o custo marginal de suprimento de energia em um determinado local do sistema (barra). Uma característica importante do preço *spot* é que ele reflete perdas e congestionamentos causados pelas transações feitas por cada barra. Além disso, este mercado fornece mecanismos para que fornecedores, e até consumidores, comercializem abertamente a energia no sistema.

3.3 Maximização do Benefício Social

O fluxo de potência ótimo convencional minimiza o custo de produção de potência ativa dos geradores do sistema. O benefício social engloba também o benefício dos consumidores e é definido pela equação (3.1).

$$Ben. Social = B(\mathbf{P}_d) - C(\mathbf{P}_g) \quad (3.1)$$

onde $B(\mathbf{P}_d)$ é o benefício total dos consumidores expresso como uma função do vetor \mathbf{P}_d , cujos componentes são as demandas de potência ativa e $C(\mathbf{P}_g)$ é custo total de geração expresso como uma função do vetor \mathbf{P}_g , cujos componentes são as potências ativas geradas, ambos em $[\$/h]$.

A maximização do benefício social através do fluxo de potência ótimo pode ser repre-

sentada como um problema de minimização da forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && C(\mathbf{P}_g) - B(\mathbf{P}_d) \\
 & \text{sujeito a.} && \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{P}_d - \mathbf{P}_g = \mathbf{0} \\
 & && \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{Q}_d - \mathbf{Q}_g = \mathbf{0} \\
 & && \mathbf{a}_{\min} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}_{\max} \\
 & && \mathbf{V}_{\min} \leq \mathbf{V} \leq \mathbf{V}_{\max} \\
 & && \mathbf{P}_{g\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_{g\max} \\
 & && \mathbf{Q}_{g\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_{g\max} \\
 & && \mathbf{P}_{d\min} \leq \mathbf{P}_d \leq \mathbf{P}_{d\max} \\
 & && \mathbf{Q}_{d\min} \leq \mathbf{Q}_d \leq \mathbf{Q}_{d\max}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde, \mathbf{Q}_g e \mathbf{Q}_d são vetores cujos componentes são a geração e a demanda, respectivamente, de potência reativa; \mathbf{V} e $\boldsymbol{\delta}$ representam vetores com a magnitude e o ângulo das tensões nodais; \mathbf{a} é o vetor com os tapes dos transformadores; $\mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta})$ são as injeções de potência ativa e reativa calculadas em função das variáveis \mathbf{a} , \mathbf{V} e $\boldsymbol{\delta}$; e \mathbf{P}_g e \mathbf{P}_d têm o mesmo significado anterior. Os subíndices *min* e *max* referem-se aos limites mínimos e máximos, respectivamente.

3.3.1 Custo de Geração de Potência Ativa

O custo de geração $C_i(P_{gi})$ é representado tipicamente pela curva de entrada-saída de uma *Unidade Geradora*. Esta curva pode ser obtida através de ensaios ou de dados de projeto, juntamente com informações sobre o custo de combustível. A função de custo é monotonicamente crescente, de modo a traduzir o comportamento esperado, segundo o qual os custos de operação aumentam com a potência gerada. No presente trabalho, essas curvas foram modeladas como funções quadráticas. As equações (3.3) e (3.4), representam uma aproximação do custo e do custo incremental de geração de potência ativa respectivamente, para a *i*-ésima unidade geradora. As figuras 3.1(a) e 3.1(b) ilustram geometricamente a forma dessas equações.

$$C_i(P_{gi}) = b_{gi}P_{gi} + \frac{1}{2}c_{gi}P_{gi}^2 \tag{3.3}$$

$$\frac{dC_i(P_{gi})}{dP_{gi}} = b_{gi} + c_{gi}P_{gi} \tag{3.4}$$

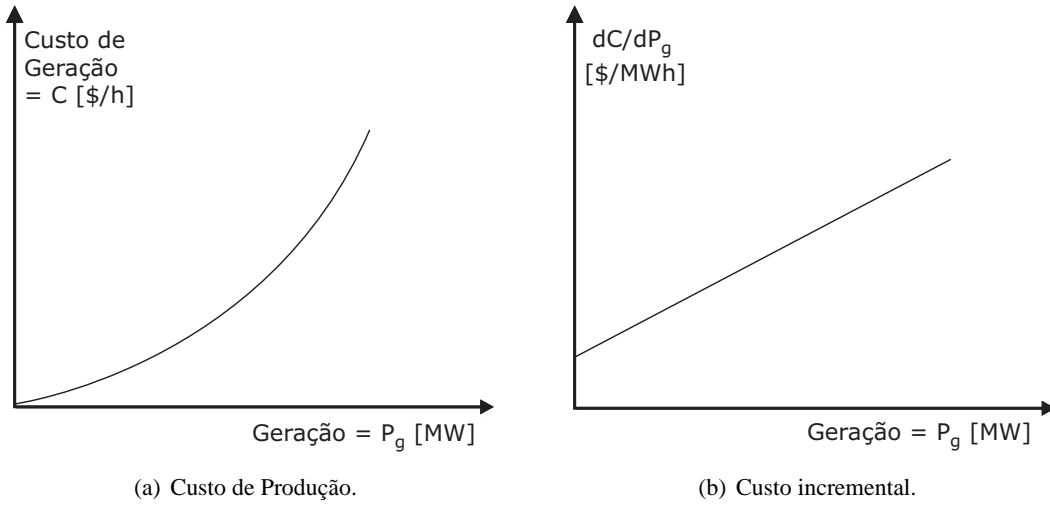


Figura 3.1: Gráficos de custo do gerador.

3.3.2 Modelagem da Função Benefício de Potência Ativa do Consumidor

O uso da carga como variável de controle é baseado na existência de uma função benefício de potência ativa do consumidor $B_i(P_{di})$. É importante que esta função seja côncava e crescente com a carga, para ajudar a garantir que exista apenas um ponto de máximo benefício social. Esta suposição é válida, porque presume-se que o consumidor sempre ganha algum benefício quanto maior for seu consumo, pois o aumento de consumo indica um aumento do processo produtivo. E mesmo que o consumidor não receba benefícios adicionais, ele poderá revender a energia no mercado. A suposição de concavidade é válida porque um consumidor inteligente sempre dará prioridade ao fornecimento de energia para seus processos mais importantes (benéficos), deixando o benefício marginal para processos de menor importância. Portanto, o incremento no benefício é alto para a carga consumida inicialmente e, conforme o consumo aumenta, a taxa incremental de benefício se reduz.

Como a função de benefício de potência ativa é côncava, o seu benefício incremental deve ser monotonicamente decrescente com o aumento de carga. Em Weber et al. (1999) é demonstrado que essa característica é equivalente a um modelo de carga variável com o preço. Dessa forma, a função benefício de potência ativa do consumidor pode ser aproximada por uma função quadrática. As equações (3.5) e (3.6), representam o benefício e o benefício incremental de potência ativa do consumidor, respectivamente. As figuras 3.2(a) e 3.2(b) apresentam a forma dessas equações.

$$B(P_{di}) = b_{di}P_{di} - \frac{1}{2}c_{di}P_{di}^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{dB(P_{di})}{dP_{di}} = b_{di} - c_{di}P_{di} \quad (3.6)$$

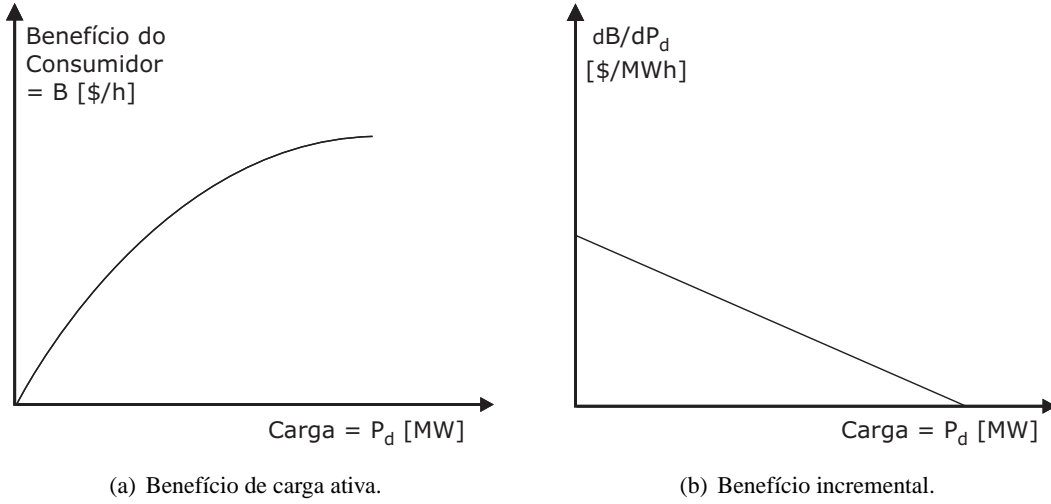


Figura 3.2: Gráficos de benefício do consumidor.

3.3.3 Modelagem da Demanda de Potência

Em Weber et al. (1999), são definidas funções de benefício para cargas ativa e reativa. No presente trabalho, apenas a função de benefício referente à potência ativa é utilizada. Ao invés de tratar a carga reativa com outra função de benefício, será considerado que é de interesse do consumidor manter seu fator de potência constante. Assim, as variações de carga reativa devem ser proporcionais às variações de carga ativa.

Dessa maneira, a carga em cada barra i do sistema, será expressa pela equação

$$\begin{aligned} P_{di} &= P_{d0i} + \rho_i \Delta P_{di} \\ Q_{di} &= Q_{d0i} + \rho_i \Delta Q_{di} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde, P_{d0i} e Q_{d0i} são as demandas base de potências ativa e reativa, e ΔP_{di} e ΔQ_{di} são as variações de carga, representadas por porcentagens da carga base, que o consumidor disponibilizará ao operador do sistema. Variações efetivas de carga ativa e reativa feitas pelo operador estarão intimamente relacionadas e serão definidas através do parâmetro ρ_i .

A modelagem representada pela equação (3.7) possibilita que as variáveis de controle P_{di} e Q_{di} sejam substituídas por apenas uma variável (ρ_i) para cada barra do sistema. Assim, o

problema (3.2) pode ser reformulado segundo a equação

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad C(\mathbf{P}_g) - B(\boldsymbol{\rho}) \\
 & \text{sujeito a.} \quad \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}_g = \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{Q}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}_g = \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{a}_{\min} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}_{\max} \\
 & \quad \mathbf{V}_{\min} \leq \mathbf{V} \leq \mathbf{V}_{\max} \\
 & \quad \mathbf{P}_{g\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_{g\max} \\
 & \quad \mathbf{Q}_{g\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_{g\max} \\
 & \quad \boldsymbol{\rho}_{\min} \leq \boldsymbol{\rho} \leq \boldsymbol{\rho}_{\max}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde, a função objetivo é o benefício social representado analiticamente pela equação (3.1) e $\boldsymbol{\rho}^d$ é uma matriz diagonal com componentes ρ_i , definidas conforme a equação (3.7); e as outras variáveis possuem o mesmo significado previamente mencionado.

Este problema não-linear pode ser resolvido através do método primal-dual de pontos interiores descrito no Anexo A. As equações e matrizes resultantes da aplicação do método de pontos interiores ao problema (3.8) são desenvolvidas na seção 3.3.4. O programa computacional desenvolvido para solucionar este problema é chamado de AMBS (Algoritmo de Maximização do Benefício Social).

Deve-se observar que os coeficientes das funções $C_i(P_{gi})$ e $B_i(\rho_i)$ são supostos constantes e conhecidos pela entidade responsável por despachar a geração do sistema de acordo com o problema (3.8). Numa situação de mercado, os coeficientes de $C_i(P_{gi})$ e $B_i(\rho_i)$ poderão representar ofertas estratégicas de geradores e consumidores, conforme será visto adiante.

3.3.4 Solução do Problema de Maximização do Benefício Social

O índice de desempenho a ser minimizado no problema (3.8) é obtido com base nas equações (3.3), (3.5), (3.7) e expresso na forma vetorial como:

$$F = [\mathbf{b}_g^t \mathbf{P}_g + \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{c}_g^d \mathbf{P}_g] - [\mathbf{b}_d^t (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)^t \mathbf{c}_d^d (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)] \tag{3.9}$$

Discretizando um conjunto de geradores e cargas controladas por um determinado indivíduo no sistema, esta função pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 F = & [\mathbf{b}_g^t \mathbf{P}_g + \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^t \mathbf{c}_g^d \mathbf{P}_g]_c - [\mathbf{b}_d^t (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)^t \mathbf{c}_d^d (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)]_c + \\
 & \mathbf{k}_g^t [\mathbf{b}_g^d \mathbf{P}_g + \frac{1}{2} \mathbf{P}_g^d \mathbf{c}_g^d \mathbf{P}_g]_i - \mathbf{k}_d^t [\mathbf{b}_d^d (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)^d \mathbf{c}_d^d (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)]_i
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde os custos de geração e benefício de carga do indivíduo são indicados pelo índice i , e os custos de geração e benefício de carga dos concorrentes são indicados pelo índice c .

\mathbf{k}_g e \mathbf{k}_d são vetores cujas componentes são constantes para o problema de Maximização do Benefício Social. O significado desses vetores (destacados para facilitar o desenvolvimento do problema de Maximização do Benefício Individual) será apresentado na próxima seção. Será denominado \mathbf{x} o vetor das variáveis de otimização, $\mathbf{x} = [\mathbf{a}^t \mathbf{V}^t \mathbf{P}_g^t \boldsymbol{\delta}^t \boldsymbol{\rho}^t]^t$.

As restrições de igualdade ($\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) correspondem às equações de balanço de potência ativa e reativa nas barras do sistema. A equação de balanço de potência reativa nas barras de geração foram tratadas como restrições de desigualdade

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}_g \\ \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{Q}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}_g \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

As restrições de desigualdades transformadas em igualdade pela adição das variáveis de folga ($\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) são mostradas abaixo.

$$\mathbf{h}_l(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\min} - \mathbf{s}_{a\min} \\ \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\min} - \mathbf{s}_{V\min} \\ \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_{g\min} - \mathbf{s}_{P_{g\min}} \\ \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\min} - \mathbf{s}_{\rho\min} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_u(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\max} + \mathbf{s}_{a\max} \\ \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\max} + \mathbf{s}_{V\max} \\ \mathbf{P}_g - \mathbf{P}_{g\max} + \mathbf{s}_{P_{g\max}} \\ \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\max} + \mathbf{s}_{\rho\max} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x}) &= [(\mathbf{Q}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + (\mathbf{Q}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{Q}_d)) - \mathbf{Q}_{g\min} - \mathbf{s}_{Q_{g\min}}] \\ \mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x}) &= [(\mathbf{Q}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + (\mathbf{Q}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{Q}_d)) - \mathbf{Q}_{g\max} - \mathbf{s}_{Q_{g\max}}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função Lagrangeana associada ao problema dual é construída incorporando-se as restrições de igualdade à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange e variáveis duais, resultando na seguinte função escalar:

$$\mathcal{L} = F(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \mu \sum \ln(s) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_l^t \mathbf{h}_l(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_u^t \mathbf{h}_u(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_{ql}^t \mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_{qu}^t \mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{k} = [\mathbf{k}_g^t \mathbf{k}_d^t]^t$ é um vetor com componentes constantes, aparecendo como argumento nesta equação apenas por simplificação. A partir da função Lagrangeana, é possível obter as condições de otimalidade (KKT) para encontrar a solução do problema. As condições de otimalidade de primeira ordem são dadas por:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

As condições de otimalidade de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\nabla \mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})' \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_l(\mathbf{x})' \boldsymbol{\pi}_l - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_u(\mathbf{x})' \boldsymbol{\pi}_u - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x})' \boldsymbol{\pi}_{ql} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x})' \boldsymbol{\pi}_{qu} \quad (3.16)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}_l} = \mathbf{0} = -\mathbf{h}_l(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}_u} = \mathbf{0} = -\mathbf{h}_u(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}_{ql}} = \mathbf{0} = -\mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}_{qu}} = \mathbf{0} = -\mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{s_l} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} - s_l^d \boldsymbol{\pi}_l \quad (3.22)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{s_u} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} + s_u^d \boldsymbol{\pi}_u \quad (3.23)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{s_{ql}} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} - s_{ql}^d \boldsymbol{\pi}_{ql} \quad (3.24)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{s_{qu}} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} + s_{qu}^d \boldsymbol{\pi}_{qu} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{e} é um vetor unitário de ordem adequada a dimensão das variáveis.

As equações não lineares de (3.16) a (3.25), resultantes da aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem, são resolvidas pelo método de Newton. No método de Newton, a cada iteração são determinados os incrementos das variáveis de otimização na direção do máximo benefício social. Esses incrementos são encontrados em cada iteração resolvendo-se o sistema de equações:

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \Delta \mathbf{y} = -\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \quad (3.26)$$

onde $\mathbf{y} = [\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\pi}^t \mathbf{s}^t]^t$. Por simplicidade, a matriz de derivadas de segunda ordem do Lagrangeano será chamada de \mathbf{W} , e o sistema de equações resultante é mostrado na equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})' & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_l(\mathbf{x})' & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_u(\mathbf{x})' & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x})' & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_l(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_u(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{ql}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{ql} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{qu}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U}_{qu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -s_l^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\pi}_l^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & s_u^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\pi}_u^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -s_{ql}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\pi}_{ql}^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & s_{qu}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\pi}_{qu}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{ql} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{qu} \\ \Delta s_l \\ \Delta s_u \\ \Delta s_{ql} \\ \Delta s_{qu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_l} \mathcal{L} \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_u} \mathcal{L} \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_{ql}} \mathcal{L} \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_{qu}} \mathcal{L} \\ \nabla_{s_l} \mathcal{L} \\ \nabla_{s_u} \mathcal{L} \\ \nabla_{s_{ql}} \mathcal{L} \\ \nabla_{s_{qu}} \mathcal{L} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde \mathbf{U} são matrizes identidade com dimensões equivalentes às respectivas variáveis. A matriz \mathbf{H} representa a segunda derivada do Lagrangeano em relação às variáveis de estado do problema de otimização original, \mathbf{x} .

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{xx}}^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \sum_{j=1}^{ni} \nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \lambda_j - \sum_{m=1}^{nd1} \nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) (\pi_{lm} + \pi_{um}) - \sum_{n=1}^{nd2} \nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{h}_{qn}(\mathbf{x}) (\pi_{qln} + \pi_{qun}) \quad (3.28)$$

As matrizes $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 F$, $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{g}_j$, $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{h}_m$ e $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{h}_{qn}$ representam as segundas derivadas de F , \mathbf{g} e \mathbf{h} em relação ao vetor \mathbf{x} . O número de equações de desigualdade das variáveis de estado é $nd1$

e o número restrições de geração de potência reativa é $nd/2$.

3.4 Maximização do Benefício Individual

Para participar do mercado de energia elétrica, os geradores enviam suas ofertas ao operador, as quais consistem em funções crescentes do preço associado à potência gerada. No modelo utilizado no presente trabalho, os consumidores do mercado também enviam ofertas de demanda com preços associados, as quais são representadas por funções decrescentes, como visto anteriormente. O operador recebe essas ofertas, e as utiliza como dados de entrada para realizar um fluxo de potência ótimo que maximiza o benefício social. Os multiplicadores de Lagrange, associados às equações de balanço de potência ativa da solução do FPO, determinam os preços *spot*. Os geradores recebem pela potência gerada o preço *spot* da barra onde o mesmo está conectado, e os consumidores pagam o preço *spot* por sua demanda.

Dentro desse ambiente, um *indivíduo* tenta maximizar seu lucro através de uma oferta estratégica enviada ao operador do sistema. A determinação dessa oferta estratégica pelo indivíduo, forma um problema de otimização em dois níveis.

3.4.1 Formulação do Problema de Otimização em Dois Níveis

Um indivíduo no mercado de energia não é composto necessariamente por um único gerador ou por uma única carga, um indivíduo pode ser um conjunto de geradores e/ou cargas pertencentes a um mesmo proprietário; ou seja, seus componentes formam uma única entidade econômica. Neste trabalho, o termo *indivíduo* refere-se a um conjunto de geradores e cargas controlados por uma única entidade.

É suposto que todas as ofertas são modeladas conforme as equações (3.4) e (3.6), com os i -ésimos custo de geração e benefício de consumo do indivíduo dados por:

$$C_i(P_{gi}) = k_{gi}(b_{gi}P_{gi} + \frac{1}{2}c_{gi}P_{gi}^2) \quad (3.29)$$

$$B_i(P_{di}) = k_{di}(b_{di}P_{di} - \frac{1}{2}c_{di}P_{di}^2) \quad (3.30)$$

onde k_{gi} e k_{di} são parâmetros que permitem o indivíduo variar suas ofertas de custo e benefício.

Variar as ofertas através do parâmetro k , é o mesmo que alterar as inclinações das funções lineares de custo incremental e de benefício incremental. Isto é ilustrado geometricamente na Figura 3.3, onde para $k=1$ temos as curvas de custo e de benefício verdadeiras do indivíduo.

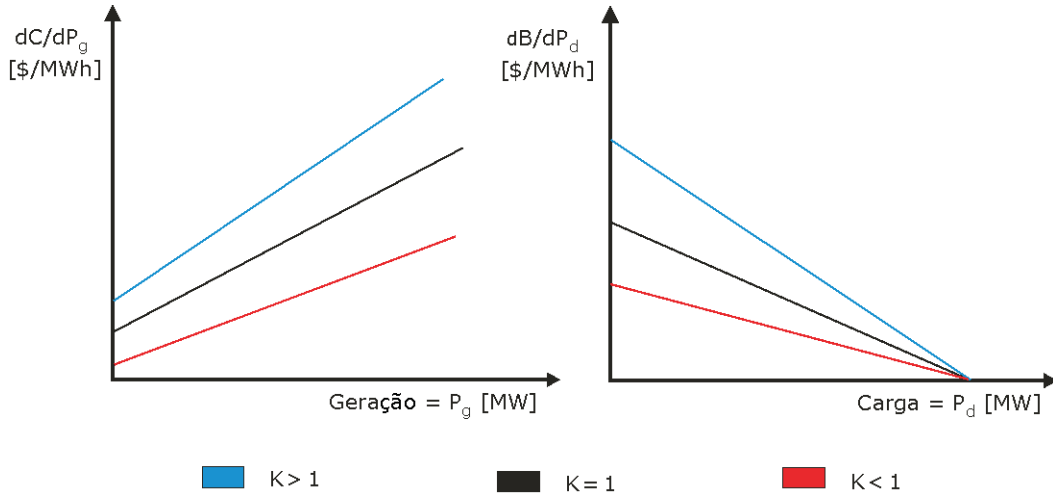


Figura 3.3: Variação de oferta para geração e para carga

A meta de um indivíduo é maximizar o lucro total de todas as cargas e geradores que ele controla. O lucro total de um gerador é o valor recebido pela sua energia, menos o custo de produção da mesma. O benefício total de uma carga é valor do seu benefício pelo uso da energia, menos o valor gasto para comprá-la. O benefício individual de um indivíduo genérico é definido como

$$Ben.Individual = \sum_{i=gerador\ controlado} [\lambda_i P_{gi} - C_i(P_{gi})] + \sum_{i=carga\ controlada} [B_i(P_{di}) - \lambda_i P_{di}] \quad (3.31)$$

onde λ_i é preço marginal da energia na barra i . Portanto, o objetivo do indivíduo em questão é maximizar a função representada pela equação (3.31), a qual modela em termos analíticos o seu benefício individual.

Nota-se, que o benefício individual não é uma função explícita da variável de oferta k , dependendo das funções de custo e de benefício verdadeiras do indivíduo. Porém, as variáveis P_g , P_d e λ são determinadas por um FPO que é função da oferta estratégica definida por k . O benefício individual é, portanto, uma função implícita de k .

No mercado ideal, as ofertas dos participantes são fechadas; ou seja, nenhum agente participante sabe quanto o outro ofertou, a não ser o operador do sistema. Atualmente porém, o uso de técnicas de estimação permite que o indivíduo consiga boas estimativas das ofertas concorrentes. Assim, o objetivo do indivíduo é maximizar seu benefício, escolhendo uma oferta que é a melhor resposta às ofertas dos outros competidores. Como resultado, a maximização do benefício individual pode ser modelada analiticamente como um problema de otimização em dois níveis, o qual possui duas entidades definidas: o indivíduo, e o operador do sistema. Neste problema, o indivíduo maximiza seu benefício individual, sujeito a um FPO que maximiza o benefício social, definido nas equações (3.2), e (3.8) para o modelo de carga definido em (3.7).

A formulação do problema de maximização do benefício individual utilizando o modelo de carga definido na equação (3.7), pode ser representado por um problema de minimização de acordo com o problema (3.32).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar}_{\mathbf{k}_g, \mathbf{k}_d} \quad f = \sum [C_i(P_{gi}) - \lambda_i P_{gi}] + \sum [\lambda_i (P_{d0i} + \rho_i \Delta P_{di}) - B_i(\rho_i)] \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{k}_{g\min} \leq \mathbf{k}_g \leq \mathbf{k}_{g\max} \\ \quad \mathbf{k}_{d\min} \leq \mathbf{k}_d \leq \mathbf{k}_{d\max} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar}_{\mathbf{a}, \mathbf{V}, \mathbf{P}_g, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}} \quad F = \sum [C_c(P_{gc}) - B_c(\rho_c)] + \sum [k_{gi} C_i(P_{gi}) - k_{di} B_i(\rho_i)] \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}_g = \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{Q}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}_g = \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{a}_{\min} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}_{\max} \\ \quad \mathbf{V}_{\min} \leq \mathbf{V} \leq \mathbf{V}_{\max} \\ \quad \mathbf{P}_{g\min} \leq \mathbf{P}_g \leq \mathbf{P}_{g\max} \\ \quad \mathbf{Q}_{g\min} \leq \mathbf{Q}_g \leq \mathbf{Q}_{g\max} \\ \quad \boldsymbol{\rho}_{\min} \leq \boldsymbol{\rho} \leq \boldsymbol{\rho}_{\max} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Note que o problema de nível inferior é o mesmo apresentado em (3.8), apenas a função objetivo foi reescrita para identificar o indivíduo e os competidores. C_i e B_i representam os custos de geração e os benefícios das cargas pertencentes ao indivíduo. C_c e B_c representam os custos de geração e os benefícios das cargas pertencentes aos competidores. Por simplicidade, o benefício individual será chamado de f , e benefício social de F . É suposto que existe um limite superior de oferta aceito pelo operador, representado por $\mathbf{k}_{g\max}$ e $\mathbf{k}_{d\max}$, e um limite inferior, $\mathbf{k}_{g\min}$ e $\mathbf{k}_{d\min}$, geralmente para garantir a não negatividade de \mathbf{k} , e assim não alterar a natureza das curvas de custo e benefício.

3.4.2 Solução do Problema de Otimização em Dois Níveis

Existem várias técnicas para resolver o problema (3.32), uma delas é representar o problema do operador pelas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker, obtendo assim um problema de otimização em um nível. Entretanto, a forma adotada neste trabalho para resolver o problema (3.32) é utilizar as informações disponíveis no FPO do operador, definido em (3.8), para calcular a sensibilidade do benefício individual em relação a variações de sua oferta. Dessa forma pode-se utilizar o método de Newton para encontrar valores de k , que maximizem o benefício individual. O valor novo de k , que maximiza o benefício individual, calculado pelo método de Newton é definido na equação (3.34).

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_d \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{k}_{novo} = \mathbf{k}_{velho} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{k}^2} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \quad (3.34)$$

Como f não é função direta de \mathbf{k} , para se calcular $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{k}^2}$, é necessário utilizar derivadas parciais.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}}^t \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_g} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}}^t \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}}^t \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{k}^2} = & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g \partial \mathbf{P}_g} \frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g \partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g \partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}} \right)^t \frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}} + \\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \mathbf{P}_g} \frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}} \right)^t \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}} + \\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{P}_g} \frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}} \right)^t \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}} + \\ & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_g} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_g}$, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}}$, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g \partial \boldsymbol{\rho}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{P}_g \partial \boldsymbol{\lambda}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \mathbf{P}_g}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\lambda}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{P}_g}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\rho}}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\lambda}^2}$, podem ser obtidas diretamente, pois o benefício individual é uma função direta de \mathbf{P}_g , $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\lambda}$.

As derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{P}_g}{\partial \mathbf{k}^2}$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{k}^2}$ e $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{k}^2}$ podem ser calculadas a partir de dados da solução do FPO do operador. Em um FPO baseado no método de Newton, são feitas iterações através da equação

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}$$

até que a norma do gradiente do Lagrangeano seja próxima a zero, $\|\nabla \mathcal{L}\| = 0$, ou até que não haja variação considerável nas variáveis de controle, $\Delta \mathbf{x} = 0$; \mathbf{H} é a matriz Hessiana, e representa a segunda derivada do Lagrangeano em relação às variáveis de estado \mathbf{x} . No método primal dual de pontos interiores apresentado no Apêndice A, as variáveis de otimização incluem também os multiplicadores duais e as variáveis de folga complementar, as iterações são feitas através de uma equação equivalente

$$\Delta \mathbf{y} = -\mathbf{W}^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{L} \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{y} = [\mathbf{x}' \boldsymbol{\lambda}' \boldsymbol{\pi}' \mathbf{s}']^t$, e a matriz \mathbf{W} é definida na equação (3.27). Dessa forma, as derivadas das variáveis de otimização \mathbf{y} em relação a \mathbf{k} podem ser encontradas derivando-se a equação (3.37).

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y} &= -\mathbf{W}^{-1} \nabla \mathcal{L} \\ \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &= -\nabla \mathcal{L} \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} &= -\frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}} \\ \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} &= -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \Delta \mathbf{y} - \frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} &= -\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \Delta \mathbf{y} - \mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}\end{aligned}\tag{3.38}$$

(3.38)

(3.39)

Da mesma forma, é possível encontrar as derivadas de segunda ordem das variáveis de controle em relação a \mathbf{k} . A partir da equação (3.38) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} + \mathbf{W} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}^2} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}^2} \Delta \mathbf{y} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}^2} &= -\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}^2} \Delta \mathbf{y} - 2\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} - \mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}^2}\end{aligned}\tag{3.40}$$

(3.40)

Substituindo (3.39) em (3.40):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}^2} = -\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}^2} \Delta \mathbf{y} - \mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}^2} + 2\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \Delta \mathbf{y} + 2\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}\tag{3.41}$$

(3.41)

As equações (3.39) e (3.41) podem ser simplificadas lembrando que na solução final do FPO temos $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Além disso, na estrutura do problema apresentado em (3.32), \mathbf{k} aparece apenas na função objetivo do operador e como um termo linear, assim pode-se verificar que $\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}^2} = \mathbf{0}$ e $\frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}^2} = \mathbf{0}$. De forma que, as derivadas de primeira e segunda ordem das variáveis de otimização em relação ao vetor \mathbf{k} são respectivamente

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}} = -\mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}\tag{3.42}$$

(3.42)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{k}^2} = 2\mathbf{W}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{W}^{-1} \frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}\tag{3.43}$$

(3.43)

Para se calcular as equações (3.42) e (3.43), ainda é necessário determinar os termos $\frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}$ e $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}}$, que devido à estrutura do problema são extremamente esparsos. $\frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}$ é uma matriz com apenas um elemento não nulo em cada coluna, enquanto que $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}}$ é um tensor de terceira ordem com apenas um elemento diagonal não nulo em cada matriz correspondente a uma dimensão de \mathbf{k} . Essas derivadas são tratadas com mais detalhes a seguir.

3.4.3 Determinação dos Tensores

Para auxiliar o cálculo da matriz $\frac{\nabla \mathcal{L}}{\partial \mathbf{k}}$ e do tensor $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{k}}$, o ponto de partida são as equações desenvolvidas para solução do problema de maximização do benefício social na seção 3.3.4, em função do vetor de variáveis de oferta \mathbf{k} , considerado constante até então.

3.4.3.1 Derivada do Gradiente do Lagrangeano em Relação a \mathbf{k}

As equações de (3.16) a (3.25) mostram a forma do gradiente do Lagrangeano do problema de maximização do benefício social. Nota-se que apenas (3.16) é função da variável de oferta \mathbf{k} , e dentro desta equação, apenas o termo relacionado à função objetivo $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ possui termos em \mathbf{k} . Dessa forma:

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}}{d\mathbf{k}} = \frac{d\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \quad (3.44)$$

Lembrando que $\mathbf{x} = [\mathbf{a}^t \mathbf{V}^t \mathbf{P}_g^t \boldsymbol{\delta}^t \boldsymbol{\rho}^t]^t$ e que $\mathbf{k} = [\mathbf{k}_g^t \mathbf{k}_d^t]^t$ temos que:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_g + \mathbf{c}_g^d \mathbf{P}_g \\ \mathbf{k}_g^d (\mathbf{b}_{gi} + \mathbf{c}_{gi}^d \mathbf{P}_{gi}) \end{Bmatrix} \\ 0 \\ \begin{Bmatrix} -[\mathbf{b}_d^d \Delta \mathbf{P}_d - (\mathbf{P}_{d0} + \boldsymbol{\rho}^d \Delta \mathbf{P}_d)^d \mathbf{c}_d^d \Delta \mathbf{P}_d] \\ -\mathbf{k}_d^d [\mathbf{b}_{di}^d \Delta \mathbf{P}_{di} - (\mathbf{P}_{d0i} + \boldsymbol{\rho}_i^d \Delta \mathbf{P}_{di})^d \mathbf{c}_{di}^d \Delta \mathbf{P}_{di}] \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Onde o índice i indica os geradores e cargas pertencentes ao indivíduo. Derivando em relação à \mathbf{k} , obtemos:

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ (\mathbf{b}_{gi} + \mathbf{c}_{gi}^d \mathbf{P}_{gi})^d \end{Bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \begin{Bmatrix} 0 \\ [\mathbf{b}_{di}^d \Delta \mathbf{P}_{di} - (\mathbf{P}_{d0i} + \boldsymbol{\rho}_i^d \Delta \mathbf{P}_{di})^d \mathbf{c}_{di}^d \Delta \mathbf{P}_{di}]^d \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Como resultado, a matriz $\frac{d\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}}$ é relativamente esparsa, possuindo apenas um elemento

não-nulo em cada coluna e é definida como:

$$\frac{d\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{d\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \\ \frac{d\nabla_{\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \\ \frac{d\nabla_{\pi} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \\ \frac{d\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.4.3.2 Derivada da Matriz do Sistema de Equações não-Lineares em Relação a \mathbf{k}

A matriz \mathbf{W} do sistema de equações não lineares do problema de maximização do benefício social é apresentada na equação (3.27). A derivada desta matriz em relação a \mathbf{k} resultará em um tensor de terceira ordem, com duas dimensões iguais às dimensões da matriz \mathbf{W} e uma dimensão determinada pelo tamanho do vetor \mathbf{k} .

A estrutura de \mathbf{W} na equação (3.27), mostra que existe somente um elemento desta matriz em função da variável \mathbf{k} , este elemento corresponde à matriz \mathbf{H} descrita na equação (3.28). Dentro desta equação, apenas o termo referente a função objetivo $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ apresenta a variável \mathbf{k} . Portanto:

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{k}} = \frac{d\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \quad (3.48)$$

Tendo em vista que:

$$\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{c}_{\mathbf{g}}^d \\ \mathbf{k}_{\mathbf{g}}^d (\mathbf{c}_{\mathbf{gi}}^d) \end{matrix} \right\} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left\{ \begin{matrix} \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^d \mathbf{c}_{\mathbf{d}}^d \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^d \\ \mathbf{k}_{\mathbf{d}}^d (\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{di}}^d \mathbf{c}_{\mathbf{di}}^d \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{di}}^d) \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Então, derivando esta matriz em relação a \mathbf{k} obtemos o seguinte tensor:

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{gi}}^D \end{matrix} \right\} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{0} \\ (\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{di}}^d \mathbf{c}_{\mathbf{di}}^d \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{di}}^d)^D \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.50)$$

Onde os sobrescritos D indicam a transformação de um vetor \mathbf{v} em um tensor $\tilde{\mathbf{V}}$, cúbico, com as três dimensões iguais à dimensão do vetor \mathbf{v} , cujos elementos $\{\tilde{\mathbf{V}}(j, k, l) | j = k = l\}$

correspondem aos elementos $\mathbf{v}(j)$, e todos os outros elementos são nulos. Caso o indivíduo tenha controle sobre apenas três geradores, por exemplo, o vetor de coeficientes de custo quadrático será dado por $\mathbf{c}_{gi} = [c_{g1} \ c_{g2} \ c_{g3}]^t$, e então:

$$\mathbf{c}_{gi}^D = \left\langle \begin{bmatrix} c_{g1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{g3} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Assim, de acordo com a equação (3.27), o tensor completo obtido derivando-se a matriz \mathbf{W} em relação à \mathbf{k} é dado por:

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\mathbf{k}} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{d\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{d\mathbf{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.51)$$

Este tensor é extremamente esparsos, possuindo apenas um elemento diagonal não-nulo em cada matriz correspondente a uma dimensão do vetor \mathbf{k} .

Com todas as derivadas determinadas, é possível calcular os passos de Newton que maximizam o benefício individual através da equação (3.34).

3.4.4 Algoritmo de Maximização do Benefício Individual (AMBI)

A maximização do benefício individual através do uso de técnicas de otimização pode ser sumarizada na seguinte sequência de passos:

1. Estimar um valor inicial para o vetor \mathbf{k} de oferta do indivíduo. Uma opção é usar as curvas de custos e benefícios verdadeiras, $\mathbf{k} = \mathbf{1}$;
2. Resolver o FPO de maximização do benefício social do operador (3.8) com as estimativas das ofertas dos competidores do mercado, e a oferta estratégica do indivíduo;
3. Usar a equação (3.34), que calcula uma direção de \mathbf{k} para crescimento do benefício individual;

4. Se \mathbf{k} ultrapassar algum limite, fixar \mathbf{k} neste limite;
5. Se $\|\mathbf{k}_{novo} - \mathbf{k}_{velho}\|$ estiver abaixo de uma tolerância especificada, pare. Senão, volte ao passo 2.

3.5 Equilíbrio de Nash

O conceito de Equilíbrio de Nash vem do desenvolvimento da teoria dos jogos não-cooperativos (Nash, 1950) em que, diferentemente dos jogos cooperativos de von Neuman, não há colaboração entre os jogadores. O ponto central da teoria dos jogos não-cooperativos é que mesmo nesta situação de não colaboração entre os jogadores, existe um ponto de equilíbrio, desde que o jogo seja finito.

Enquanto o AMBI é de interesse dos participantes do mercado, os agentes reguladores do sistema estão preocupados com o comportamento deste mercado. Portanto, é de interesse desses agentes também verificar se existe uma situação de equilíbrio caso as entidades participantes do mercado utilizem o AMBI como modelo para gerar suas ofertas. Na teoria dos jogos, o Equilíbrio de Nash representa uma situação em que nenhum jogador pode melhorar a sua situação dada a estratégia seguida pelo jogador adversário. Assim, o Equilíbrio de Nash é alcançado quando:

1. O indivíduo observa o comportamento dos seus concorrentes.
2. O indivíduo determina que a melhor resposta ao comportamento dos seus concorrentes é manter seu comportamento atual.
3. Isto é verdadeiro para todos os indivíduos no mercado.

Utilizando este conceito é possível verificar se existe uma situação de equilíbrio entre os participantes do mercado.

3.5.1 Algoritmo de Busca do Equilíbrio de Nash (ABEN)

A determinação do ponto de Equilíbrio de Nash através de um algoritmo baseado no AMBI é baseada no algoritmo descrito a seguir.

1. Inicializar todos os indivíduos com um vetor de oferta \mathbf{k} . Uma boa estimativa é utilizar as ofertas verdadeiras $\mathbf{k} = \mathbf{1}$;
2. Usar o AMBI para cada indivíduo, atualizando as ofertas;
3. Continue o passo 2 até que todos os indivíduos parem de alterar suas ofertas.

3.6 Conclusão

Sob condições de mercado, o despacho de potência ativa deve ter como objetivo o máximo benefício social, obtido a partir das ofertas de geração e consumo entregues pelos agentes ao operador do sistema. Uma vez conhecidas essas ofertas, o despacho de potência é obtido como a solução de um problema de otimização de um único nível, o FPO. Entretanto, a solução deste problema não fornece subsídios para os agentes definirem estratégias de oferta, ou para que os agentes reguladores verifiquem o comportamento do mercado.

Ofertas estratégicas são derivadas a partir da solução do problema de otimização do benefício individual, o qual possui dois níveis, constituindo o FPO o seu nível inferior. Desde que pode obter a oferta estratégica individual, este mesmo problema de otimização pode ser utilizado pelos agentes reguladores para analisar a existência de um ponto de equilíbrio para o mercado.

Com base nesses conceitos, foram implementados três tipos de algoritmos de otimização. O AMBS, que é um problema de otimização multi-objetivo, o AMBI, que utiliza o AMBS iterativamente para encontrar a solução de um problema de otimização em dois níveis, e o ABEN, que utiliza o AMBI iterativamente para encontrar um ponto de Equilíbrio de Nash.

O AMBS foi solucionado aplicando-se a técnica de primal-dual de pontos interiores apresentada no Apêndice A, enquanto o AMBI e o ABEN utilizam uma técnica de otimização em dois níveis com informações da solução do AMBS.

No capítulo seguinte, são mostradas as simulações computacionais que ilustram a aplicação dos conceitos teóricos apresentados anteriormente.

Capítulo 4

Simulações e Resultados Numéricos

4.1 Introdução

Neste capítulo, o Algoritmo de Maximização do Benefício Individual (AMBI) é aplicado na determinação das ofertas que produzem o benefício máximo para um determinado indivíduo no sistema. Os resultados obtidos via AMBI serão comparados com os resultados do Algoritmo de Maximização do Benefício Social (AMBS), de forma a possibilitar a verificação dos impactos das ofertas estratégicas no sistema.

Para o agente regulador, é interessante verificar se existe um ponto de equilíbrio no mercado de energia, caso mais de uma entidade utilize o AMBI para gerar a sua oferta. O Algoritmo de Busca do Equilíbrio de Nash (ABEN) é utilizado para simular o jogo de ofertas. Supõe-se que cada participante possui a *informação perfeita* dos seus concorrentes; ou seja, cada participante sabe quais serão as ofertas dos seus adversários. Apesar das ofertas serem fechadas no mercado real, um participante pode obter estimativas das ofertas concorrentes através de dados históricos e estatística.

Dois sistemas teste foram utilizados para as simulações computacionais: um sistema de 2 barras, utilizado em Weber e Overbye (1999), e o sistema de 30 barras do IEEE, modificado de forma a incluir as cargas variáveis.

4.2 Considerações Iniciais

Conforme mencionado anteriormente, é suposto que toda entidade que utiliza o AMBI tem informação perfeita sobre os outros participantes, de forma que o indivíduo em questão sabe quais são os custos e benefícios reais dos seus concorrentes.

Nos resultados obtidos a seguir, o termo *Custo* se refere ao custo de produção dos geradores, modelado na equação (3.3); o termo *Recebimento* se refere ao valor que o gerador recebe do mercado pela potência entregue ao sistema, sendo definido pelo custo marginal da barra em que o gerador está conectado. O termo *Benefício* ou *Benefício de Carga* se refere ao benefício de consumo de carga do consumidor, modelado na equação (3.5); O termo *Pagamento* se refere ao valor que o consumidor deve pagar pela potência consumida, e é definido pelo custo marginal da barra em que o consumidor está conectado.

O termo *participante ativo no mercado* se aplica a todos os geradores do sistema e aos consumidores cujas cargas reagem ao custo marginal do sistema, de acordo com a oferta de benefício enviada ao operador do sistema.

Neste trabalho, considera-se que a diferença entre o benefício social de um mercado sem jogadas estratégicas dos participantes e o benefício social do mesmo mercado com estratégias de oferta é a medida da ineficiência causada pelas ações estratégicas.

4.3 Sistema de 2 Barras

O sistema de 2 barras apresentado nesta seção foi transcrito de Weber e Overbye (1999), e é composto de dois geradores e uma carga variável, como mostrado na Figura 4.1. Os coeficientes de custo de produção dos geradores e os coeficientes de benefício de potência ativa do consumidor são apresentados na Tabela 4.1. Esses coeficientes são os mesmos apresentados nas equações (3.29) e (3.30), reescritas abaixo. Os limites operacionais de geração e consumo de potência ativa não serão considerados.

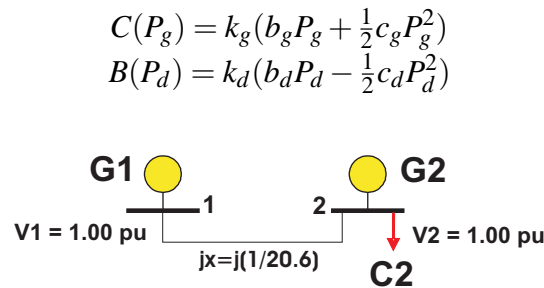


Figura 4.1: Sistema de 2 barras (Weber e Overbye, 1999).

4.3.1 Maximização do Benefício Social

No sistema apresentado na Figura 4.1, a linha que conecta as duas barras do sistema não possui resistência e portanto o sistema não apresenta perdas de potência ativa. Assim, a potência ativa gerada pelos geradores G1 e G2 deve ser igual à carga demandada por C2.

Gerador	b_g	c_g
G1	10	0,02
G2	10	0,02
Consumidor	b_d	c_d
C2	30	0,08

Tabela 4.1: Coeficientes de custos e benefícios reais do sistema de 2 barras.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Ind. (\$)
G1	11111,11	299,57	12,222	1234,57	1358,03	123,46
G2	11111,11	299,57	12,222	1234,57	1358,03	123,46
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Ind. (\$)
C2	22222,22	0	12,222	4691,36	2716,05	1975,31
Benefício Social (\$) = 2222,22						

Tabela 4.2: Maximização do benefício social para o sistema de 2 barras.

Nota-se pela Tabela 4.1 que G1 e G2 possuem o mesmo custo de produção e assim, se nenhuma estratégia de oferta for utilizada, G1 e G2 participam igualmente do atendimento da carga. Como não existem limites de transmissão, as duas barras do sistema devem possuir o mesmo custo marginal.

O benefício social é dado pela soma dos benefícios de carga dos consumidores, subtraindo-se os custos de produção dos geradores. Desde que os custos marginais das barras 1 e 2 são iguais, o benefício social pode ser calculado alternativamente pela soma dos benefícios individuais dos participantes ativos do mercado. Os resultados obtidos com o algoritmo de maximização do benefício social (AMBS) são apresentados na Tabela 4.2. O valor encontrado para o máximo benefício social é de 2222,22\$.

4.3.2 Maximização do Benefício Individual dos Participantes

Nesta seção, serão simulados os casos onde cada participante (G1, G2 e C2) maximiza seu benefício individual, supondo que todos os seus concorrentes mantêm suas ofertas de custo e benefício reais ($k = 1$).

4.3.2.1 Gerador G1

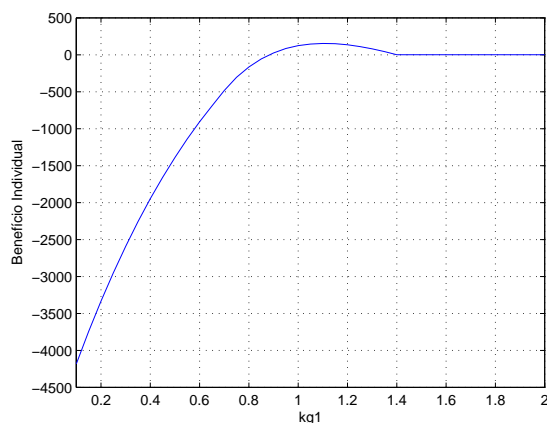
Utilizando o AMBI, o máximo benefício individual de G1 foi encontrado em 4 iterações, com a oferta $k_{g1} = 1,1067$. A Figura 4.2(a) foi obtida especificando-se k_{g1} no AMBS e calculando-se o benefício individual resultante de G1. Assim, esta figura representa a forma geométrica da função de benefício individual de G1. As Figuras 4.2(b) e 4.2(c) mostram a trajetória do AMBI para encontrar a oferta ótima. Essas figuras mostram portanto, a eficácia do algoritmo adotado na resolução do problema (3.32).

Os gráficos da Figura 4.2, mostram que para ofertas maiores que $k_{g1} = 1,4$ o benefício individual de G1 é zero. Isso acontece porque a oferta de G1 é muito alta, e conseqüentemente G1 não é despachado pelo operador. Assim, tanto o custo de produção de energia quanto o valor recebido do mercado são nulos. Para ofertas entre $k_{g1} = 0$ e $k_{g1} = 0,88$ o benefício individual é negativo. Isso ocorre porque nessa faixa de ofertas o gerador G1 é responsável por toda ou pela maior parte da geração. Assim, G1 tem um alto custo de produção, e recebe do mercado um valor proporcional à oferta enviada, que é menor do que o seu custo real de produção.

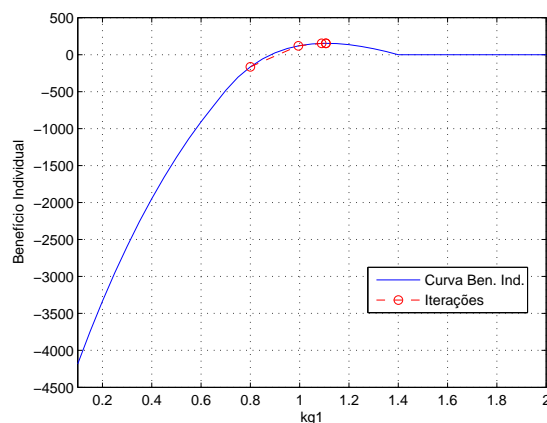
De $k_{g1} = 0$ até $k_{g1} = 1,1067$, o benefício individual de G1 é uma função crescente. Isso ocorre principalmente devido à economia no custo de produção de energia de G1 com o aumento de k_{g1} . Essa economia no custo de produção se dá por dois motivos: o primeiro é que à medida que a oferta de preço da energia de G1 aumenta, sua participação no atendimento da carga tende a se reduzir, ao contrário do que acontece com o gerador G2. O segundo motivo, é que o consumidor C2 reage ao aumento do custo marginal do sistema reduzindo sua carga. A Figura 4.3 mostra o comportamento da carga do sistema para cada valor de k_{g1} .

De $k_{g1} = 1,1067$ a $k_{g1} = 1,4$, o benefício individual comporta-se como uma função decrescente. Nessa faixa de ofertas, a potência despachada por G1 decresce rapidamente, e o gerador G2 começa a atender a maior parte da carga do sistema. O aumento de k_{g1} causa uma redução do valor recebido pelo mercado maior do que a economia no custo de geração.

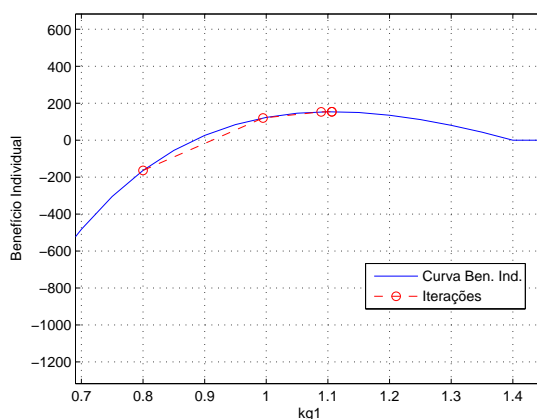
As curvas de custo e de recebimento do gerador G1 em função da oferta k_{g1} são mostradas na Figura 4.4. O primeiro ponto onde essas duas curvas se cruzam é em $k_{g1} = 0,88$. À partir deste ponto, o recebimento é maior do que o custo de geração e o benefício individual é positivo. Quando o recebimento de G1 é maior que seu custo, o ponto de maior distância



(a) Curva de benefício individual de G1.



(b) Iterações do algoritmo de Maximização do Benefício Individual.



(c) Aproximação no gráfico 4.11(b).

Figura 4.2: Curva de benefício de G1 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras.

entre as curvas de recebimento e custo corresponde a $k_{g1} = 1,1067$, e equivale o ponto de máximo benefício individual de G1. A partir de $k_{g1} = 1,4$ as curvas de custo e recebimento de G1 se anulam, e o benefício individual de G1 é zero.

Os resultados finais do AMBI para o gerador G1 são apresentados na Tabela 4.3. Comparando os valores dessa tabela com os valores obtidos na Tabela 4.2, observamos resultados interessantes. O benefício individual de G1 aumentou em 24,6%, enquanto o benefício individual de G2, que não utilizou nenhuma estratégia de oferta, aumentou em 55,3%. Isto indica que a oferta escolhida por G1 produziu mais benefícios para G2 do que para G1, não deixando de ser a melhor estratégia possível de G1 para o seu índice de maximização de benefício individual. A carga C2 teve seu benefício individual reduzido em 6,06%, e o benefício social do sistema diminuiu em 0,95%, o que era esperado, uma vez que houve um desvio em relação ao ponto de máximo benefício social. Portanto, neste caso, a oferta estratégica de G1 beneficiou os dois geradores e prejudicou o consumidor. Observa-se entretanto,

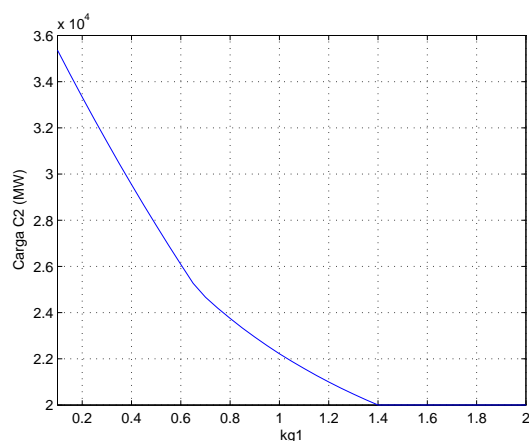


Figura 4.3: Comportamento da carga do sistema de 2 barras.

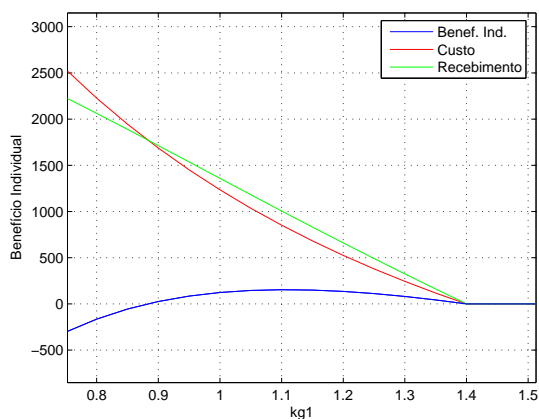


Figura 4.4: Curva de custo e recebimento de G1.

que o prejuízo do consumidor foi bem menor que o ganho dos geradores.

4.3.2.2 Gerador G2

A curva de benefício individual, juntamente com a solução encontrada pelo AMBI de G2 são mostradas na Figura 4.5. Como era esperado, o gerador G2 possui a mesma curva de benefício individual de G1, e portanto os mesmos resultados encontrados para G1 se aplicam a G2. O máximo benefício individual é encontrado com $k_{g2} = 1,1067$.

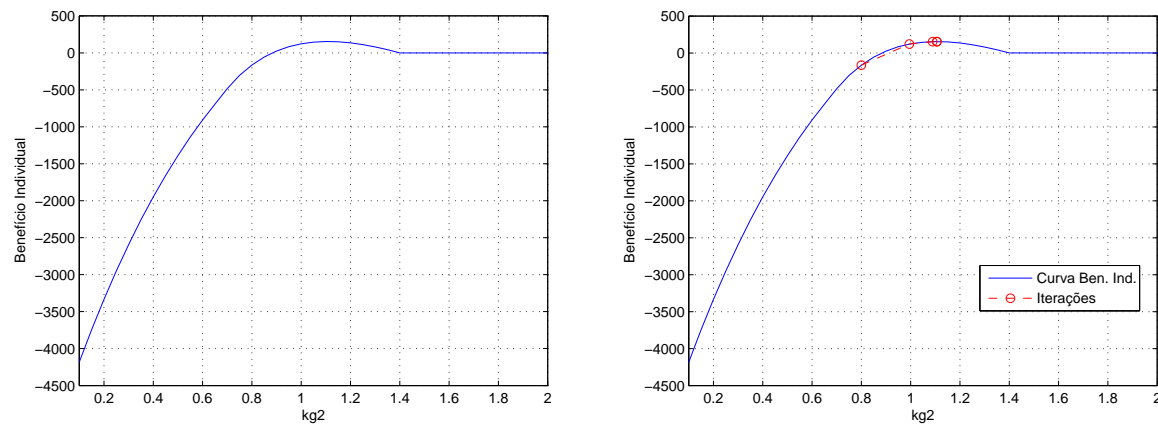
A Tabela 4.4 apresenta os resultados finais do AMBI para o gerador G2. A única diferença encontrada com relação aos resultados do AMBI para G1 é um aumento na geração de potência reativa dos dois geradores. Isso se deve ao aumento das perdas reativas, causadas pelo aumento do fluxo de potência na linha de transmissão (note-se que neste caso é G1 que alimenta a maior parte da carga de C2). Neste caso, o aumento do benefício do gerador G1 é maior do que o do gerador G2, mantendo-se o mesmo prejuízo para a carga C2.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Ind. (\$)
G1	7692,32	143,64	12,77	828,4	982,25	153,85
G2	13846,15	143,64	12,77	1576,33	1768,05	191,72
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Ind. (\$)
C2	21538,46	0	12,77	4605,92	2750,3	1855,62
Benefício Social (\$) = 2201,19						

Tabela 4.3: Maximização do benefício individual de G1.

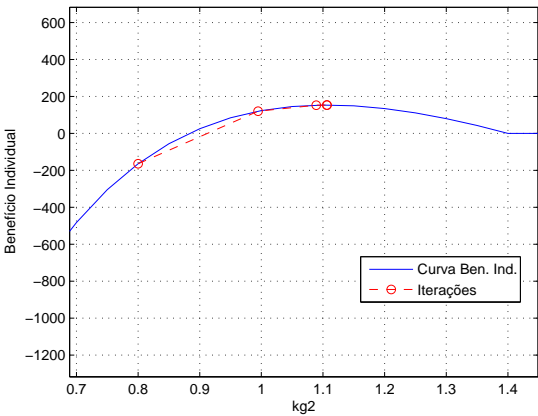
Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Ind. (\$)
G1	13846,15	464,57	12,77	1576,33	1768,05	191,72
G2	7692,32	464,57	12,77	828,4	982,25	153,85
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Ind. (\$)
C2	21538,46	0	12,77	4605,92	2750,3	1855,62
Benefício Social (\$) = 2201,19						

Tabela 4.4: Maximização do benefício individual de G2.



(a) Curva de benefício individual de G2.

(b) Iterações do algoritmo de Maximização do Benefício Individual.

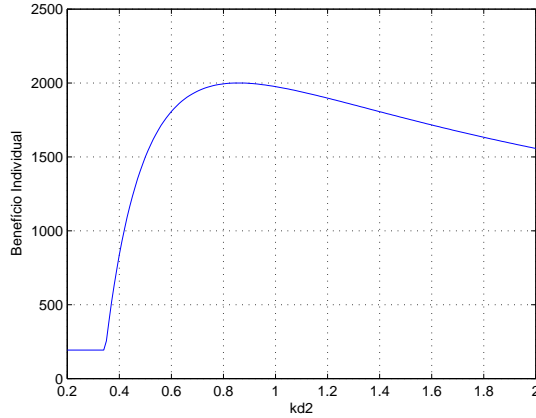


(c) Aproximação no gráfico 4.11(b).

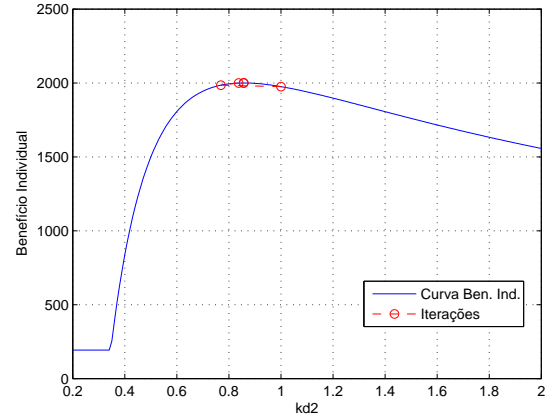
Figura 4.5: Curva de benefício de G2 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras.

4.3.2.3 Carga C2

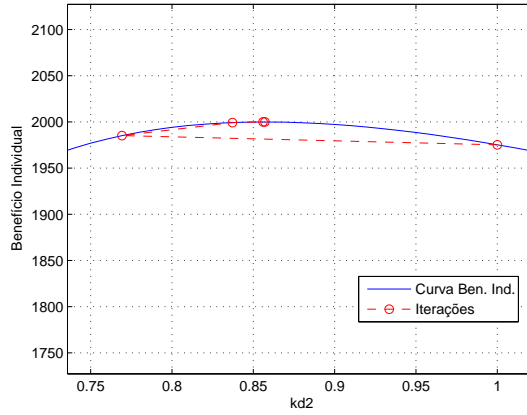
A curva de benefício individual e a trajetória da solução encontrada pelo AMBI para a carga C2 são mostradas na Figura 4.6. O máximo benefício individual de C2 foi encontrado com a variável de oferta $k_{d2} = 0,8571$, em 5 iterações do algoritmo de otimização.



(a) Curva de benefício individual de C2.



(b) Iterações do algoritmo de Maximização do Benefício Individual.



(c) Aproximação no gráfico 4.11(b).

Figura 4.6: Curva de benefício de C2 e iterações do AMBI para o sistema de 2 barras.

A Figura 4.7 ilustra o comportamento da curva de pagamento e da curva de benefício de carga de C2. Estas curvas são importantes para a compreensão do formato da curva de benefício individual. Com o aumento de k_{d2} o benefício de consumo da carga C2 visto pelo operador aumenta, e em consequência, a carga de C2 despachada também aumenta. Com o aumento da carga C2, as potências despachadas por G1 e G2 devem aumentar, e assim o custo marginal do sistema também aumenta. Portanto, tanto o pagamento quanto o benefício de carga de C2 são funções crescentes para a faixa de valores de k_{d2} estudada.

De $k_{d2} = 0$ a $k_{d2} = 0,35$ a oferta de benefício de carga é baixa, e a carga é mantida

constante. Assim, tanto o pagamento quanto o benefício de carga de C2 são constantes. A partir de $k_{d2} = 0,35$ até $k_{d2} = 0,8571$, o benefício individual de C2 é crescente, porque a taxa de crescimento do seu benefício de carga é maior que a taxa de aumento do pagamento que deve ser feito por C2. A partir de $k_{d2} = 0,8571$, o coeficiente quadrático e negativo da equação (3.30) de benefício de carga se torna mais significativo, e a taxa de crescimento da curva de pagamento se torna maior que a taxa de crescimento do benefício de carga de C2. Consequentemente, o benefício individual de C2 começa a decrescer.

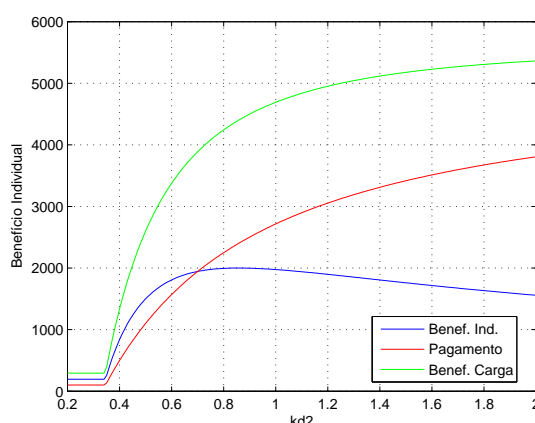


Figura 4.7: Curva de pagamento e benefício de carga de C2.

A Tabela 4.5 mostra os resultados finais do AMBI aplicado a C2. Comparando com os resultados obtidos na Tabela 4.2, onde não há estratégias de oferta, os benefícios individuais de G1 e G2 se reduziram em 19%, enquanto que o benefício individual de C2 aumentou em 1,25%. A estratégia de oferta escolhida por C2 causou uma redução de 1% no benefício social do sistema. Observa-se portanto, que uma oferta estratégica de carga causa impacto mais acentuado no benefício individual dos geradores do que o contrário; ou seja, o impacto de ofertas estratégicas dos geradores no benefício das cargas é menor.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	10000	242,71	12	1100	1200	100
G2	10000	242,71	12	1100	1200	100
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C2	20000	0	12	4400	2400	2000
Benefício Social (\$) = 2200						

Tabela 4.5: Maximização do benefício individual de C2.

4.3.3 Competição entre G1 e G2

Nesta seção, será analisado o comportamento do mercado quando G1 e G2 são controlados por duas entidades distintas, as quais modelam suas ofertas da mesma forma; ou seja, utilizando o AMBI. É suposto que G1 tem conhecimento da utilização do AMBI por G2, que por sua vez, também possui este conhecimento sobre G1. Outra consideração é que ambos estão conscientes do conhecimento do rival. Nesta situação, os geradores G1 e G2 participarão de um jogo de ofertas em que cada jogador tentará antever a oferta do seu adversário. Isto caracteriza um *jogo não cooperativo*, tal que a solução deste problema será encontrada apenas se existir um ponto de *Equilíbrio de Nash*, na qual ambos os jogadores estarão satisfeitos com suas ofertas, dada a oferta do adversário.

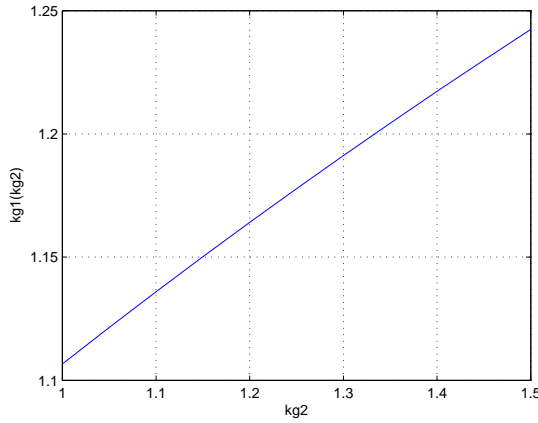
Inicializando as variáveis de oferta dos geradores com o valor real de seus custos de produção ($k_{g1} = k_{g2} = 1$) e utilizando o Algoritmo de Busca do Equilíbrio de Nash (ABEN), no ponto de equilíbrio encontrado as variáveis de oferta são $k_{g1} = 1,1502$ e $k_{g2} = 1,1502$. Este ponto pode ser determinado graficamente, plotando-se as funções $k_{g1}(k_{g2})$ e $k_{g2}(k_{g1})$, conforme as figuras 4.8(a) e 4.8(b) respectivamente. O posicionamento dessas figuras no mesmo plano cartesiano resulta no gráfico da Figura 4.8(c). Pode-se verificar analiticamente que o ponto de intersecção das funções $k_{g1}(k_{g2})$ e $k_{g2}(k_{g1})$ corresponde ao ponto de Equilíbrio de Nash.

O resultado final apresentado pelo operador no ponto de Equilíbrio de Nash, é mostrado na Tabela 4.6. O benefício individual dos geradores aumentou em 130,6% em relação ao caso em que nenhuma estratégia é utilizada (Tabela 4.2). Em contrapartida, o benefício individual de C2 se reduziu em 17,25% e o benefício social do sistema se reduziu em 0,82%.

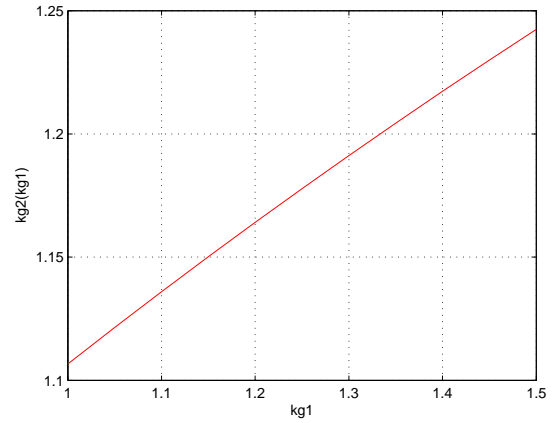
Nota-se que o jogo de estratégias de oferta entre G1 e G2, permitiu que seus benefícios individuais atingissem valores superiores àqueles alcançados no caso em que apenas G1 ou G2 utilizava uma estratégia de oferta. Observa-se também, a importância da carga participar no mercado através de ofertas estratégicas, de forma que não tenha o seu benefício reduzido em 17,25%.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	10107,81	248,13	13,83	1112,95	1397,66	284,71
G2	10107,81	248,13	13,83	1112,95	1397,66	284,71
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C2	20215,62	0	13,83	4430	2795,32	1634,69
Benefício Social (\$) = 2204,1						

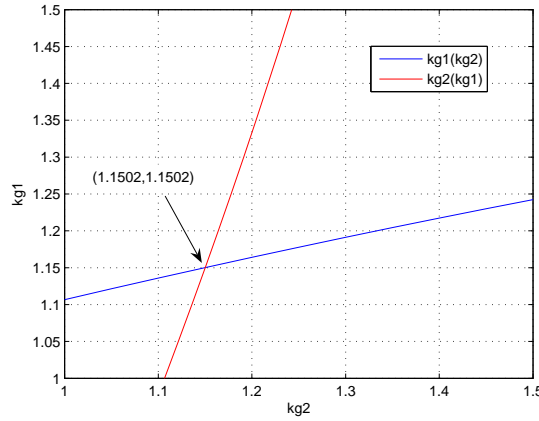
Tabela 4.6: Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e G2.



(a) Resposta de G1 às ofertas de G2.



(b) Resposta de G2 às ofertas de G1.



(c) Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e G2.

Figura 4.8: Equilíbrio de Nash entre G1 e G2

4.3.4 Competição entre G1 e C2

Considere agora que o gerador G2 é removido do sistema, e que G1 e C2 utilizam o AMBI individualmente para modelarem suas ofertas, da mesma forma descrita na seção anterior. O Equilíbrio de Nash para este caso, é encontrado no ponto $k_{g1} = 1,5714$ e $k_{d2} = 0,8571$. Os gráficos que representam as funções $k_{g1}(k_{d2})$ e $k_{d2}(k_{g1})$ são mostrados nas figuras 4.9(a) e 4.9(b), respectivamente. O Equilíbrio de Nash é determinado graficamente na Figura 4.9(c).

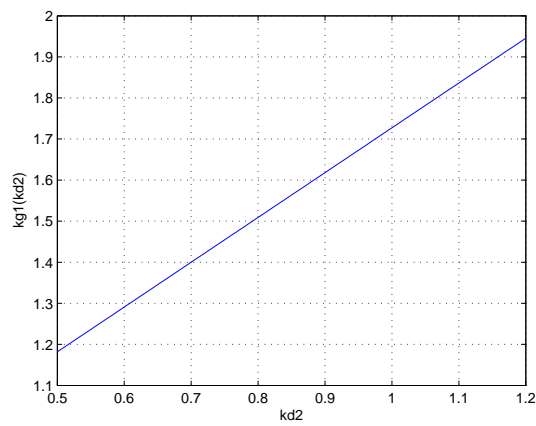
A Tabela 4.7 apresenta os resultados do despacho no ponto de Equilíbrio de Nash. Com a ausência do gerador G2, G1 conseguiu aumentar significativamente seu benefício individual em relação à todos os casos anteriores. Comparando com o caso em que nenhuma estratégia de oferta era usada (Tabela 4.2), o benefício individual de G1 aumentou em 514,5%, o benefício individual de C2 se reduziu em 63,84%, enquanto que o benefício social do sistema

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/pu MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	10000	486	18.86	1100	1885.71	785.71
G2	0	0	18.86	0	0	0
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/pu MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C2	10000	0	18.86	4430	1885.71	714.29
Benefício Social (\$) = 1500.00						

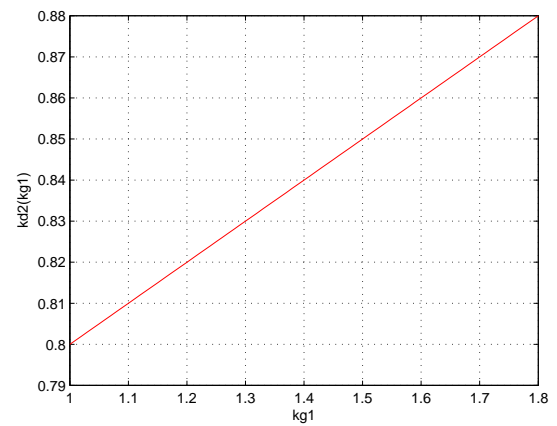
Tabela 4.7: Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e C2.

se reduziu em 32,5%.

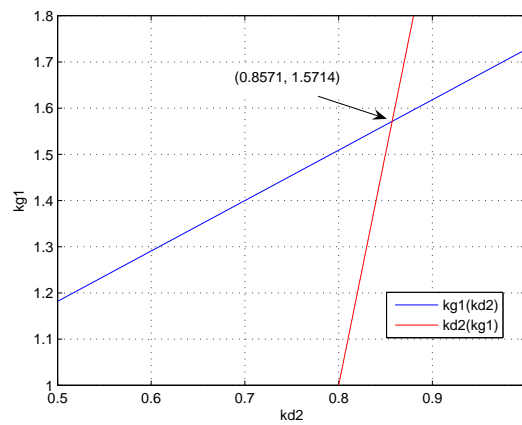
A partir desses resultados, é possível verificar que a ausência de competição permitiu que G1 obtivesse grande poder de mercado, tal que a partir de sua oferta, pudesse aumentar consideravelmente o seu benefício individual. Se a carga C2 não reagisse ao preço marginal do sistema, G1 poderia enviar ao operador do sistema uma oferta infinita, e assim obter um benefício individual infinito. Para o operador, este poder de mercado não é desejável, pois quanto maior o poder de mercado de um indivíduo no sistema, maior o desvio obtido em relação ao máximo benefício social.



(a) Resposta de G1 às ofertas de C2.



(b) Resposta de C2 às ofertas de G1.



(c) Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e C2.

Figura 4.9: Equilíbrio de Nash entre G1 e C2

4.4 Sistema de 30 Barras do IEEE

O sistema de 30 barras do IEEE mostrado na Figura 4.10 é composto por: 6 geradores, 24 barras de carga, 37 linhas de transmissão e 4 transformadores com tap variáveis.

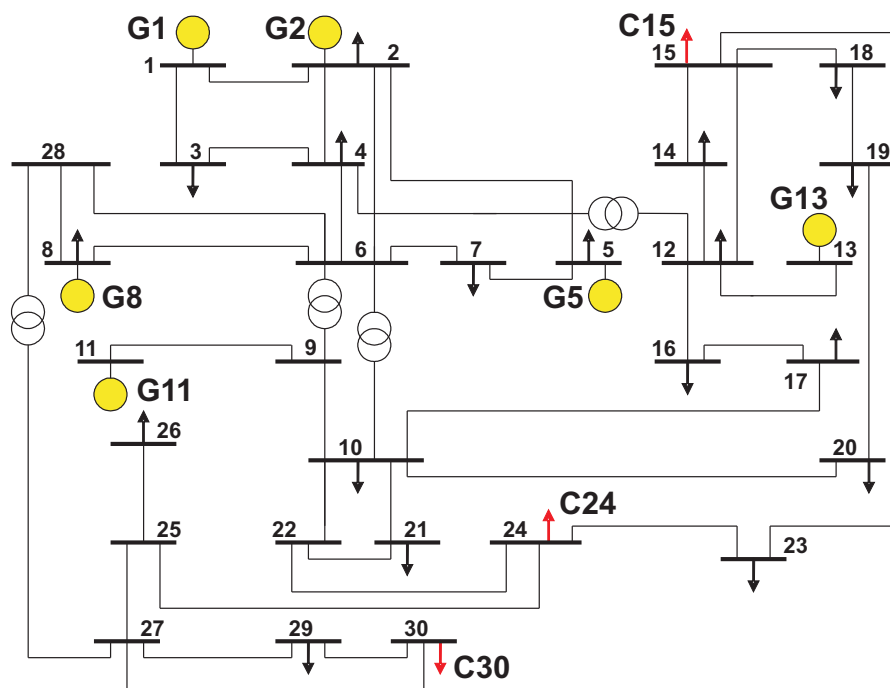


Figura 4.10: Sistema de 30 barras do IEEE.

As barras de carga 15, 24 e 30 foram transformadas em barras com carga variável; ou seja, são consumidores ativos no mercado de energia, e enviam ofertas de benefício de potência ativa ao operador do sistema. Os dados de barra, linha, e limites operacionais do sistema são fornecidos no Anexo B. Os coeficientes de custo dos geradores e benefício de potência ativa dos consumidores são apresentados na Tabela 4.8.

Gerador	b_g	c_g
G1	200,00	250,00
G2	285,00	285,00
G5	100,00	225,00
G8	225,00	235,00
G11	325,00	350,00
G13	300,00	250,00
Consumidor	b_d	c_d
C15	200,00	50,00
C24	300,00	50,00
C30	505,00	18,00

Tabela 4.8: Custos e benefícios reais do sistema de 30 barras.

4.4.1 CASO A: Controle sobre o Gerador G1

Nesta seção, o gerador G1 da Figura 4.10 é suposto ser o participante que utiliza o Algoritmo de Maximização do Benefício Individual (AMBI). As barras com carga variável são limitadas a variações de 0% a $\pm 50\%$ da carga base, e os benefícios de consumo de potência ativa previamente especificados. É suposto que G1 conhece as ofertas dos outros geradores, e com isso define sua estratégia de oferta.

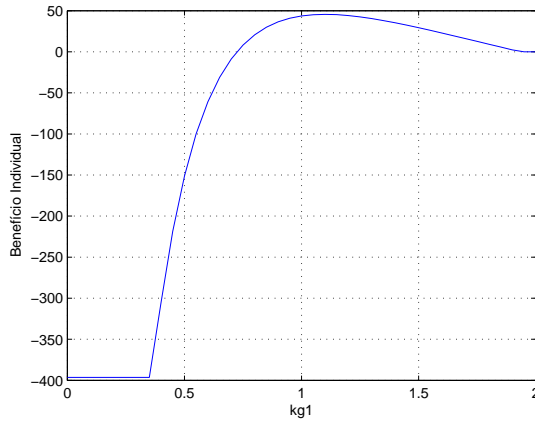
A Figura 4.11(a) foi plotada especificando-se valores para a variável de oferta k_{g1} no Algoritmo de Maximização do Benefício Social (AMBS), e calculando-se o benefício individual de G1 resultante. Assim, a Figura 4.11(a) representa geometricamente a equação de benefício individual de G1, possibilitando verificar que existe um ponto de máximo para o benefício individual. As figuras 4.11(b) e 4.11(c) mostram a variação do benefício individual durante o processo iterativo para a sua maximização, denotado AMBI. Inicializando-se a variável de oferta com o valor $k_{g1} = 0,8$, o AMBI obteve o ponto de máximo benefício individual em 5 iterações, com o valor da variável de oferta em 1,098. Essas figuras fornecem um indicativo do desempenho deste algoritmo na solução de problema (3.32) de porte mais elevado.

Nos parágrafos seguintes, são comparados os resultados obtidos via AMBS (sem estratégias de oferta dos participantes) e AMBI para o gerador G1.

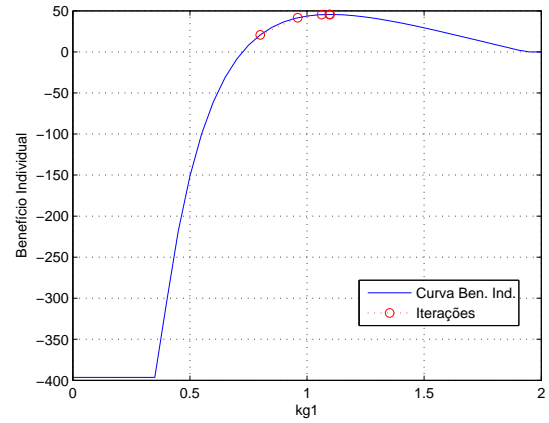
As figuras 4.12(a) e 4.12(b) apresentam o módulo e o ângulo da tensão complexa nas barras, para os dois índices de desempenho considerados. A estratégia de oferta pelo gerador G1 resultou num leve aumento do perfil de tensão. Por outro lado, observa-se que os ângulos se alteraram mais significativamente e as aberturas angulares em relação à barra 1 diminuíram. Isto evidencia uma redução da potência ativa suprida por esta barra ao sistema, conforme será detalhado a seguir.

A Figura 4.13(a) mostra que a estratégia de oferta escolhida por G1 fez com que sua potência ativa gerada diminuísse aproximadamente 10 MW. Conseqüentemente, os outros geradores do sistema tiveram sua geração de potência ativa aumentada para atender a carga do sistema, a qual permaneceu inalterada. A Figura 4.13(b) mostra que não houve mudanças significativas na geração de potência reativa, o que era esperado, uma vez que o perfil de tensão também não se alterou significativamente.

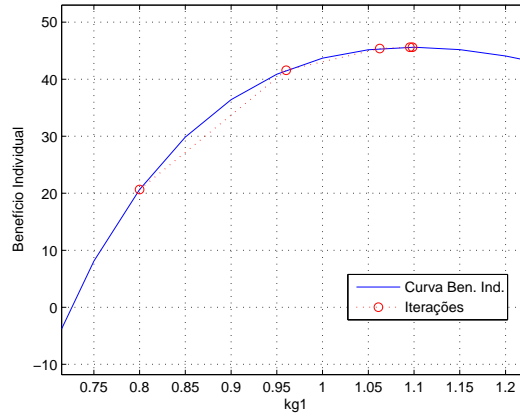
Nos resultados obtidos pelo AMBS e pelo AMBI não houve modificação da carga dos consumidores ativos, conforme mostram as figuras 4.14(a) e 4.14(b). As demandas C15 e C24 estão no limite inferior, e C30 no limite superior, decorrentes das variações de $\pm 50\%$ permitidas no seu valor base. Ou seja, variações adicionais nessas cargas não são possíveis, o que indica que a alteração da oferta de G1 pelo AMBI não foi suficiente para mudar essa situação.



(a) Curva de benefício individual de G1.



(b) Iterações do algoritmo de Maximização do Benefício Individual.



(c) Aproximação no gráfico 4.11(b).

Figura 4.11: Curva de benefício de G1 e iterações do AMBI para o sistema de 30 barras.

Os custos marginais das barras do sistema são mostrados na Figura 4.15. A análise desta figura mostra o impacto mais significativo causado pela estratégia de oferta de G1, que elevou k_{g1} a 1,098, resultando num aumento acentuado no custo marginal de todas as barras do sistema. Com isto, todas as cargas do sistema foram prejudicadas, no sentido de que passaram a pagar mais pela energia consumida.

A Tabela 4.9 apresenta os resultados gerais para os índices de maximização do benefício social e maximização do benefício individual. Os valores negativos encontrados para o benefício social ($B(p) - C(P_g)$) são devidos ao custo de produção de energia dos geradores, cujos coeficientes somados são bem mais significativos que os coeficientes de benefício dos consumidores. Além disso, a presença de perdas no sistema faz com que a potência gerada (P_g) seja sempre maior que a carga ($Pd_0 + \rho \Delta P_d$). Conforme mencionado no início do capítulo, a diferença entre o benefício social de um mercado sem jogadas estratégicas dos participantes e o benefício social do mesmo mercado com estratégias de oferta é a medida

da ineficiência causada pelas ações estratégicas. Observa-se portanto, que quando somente o gerador G1 atua de forma estratégica, a ineficiência causada ao sistema é da ordem de $-658,37 - (-672,56) = 14,19\$$. Apesar disso, a redução das perdas nas LT's foi da ordem de 7%, e o benefício individual do gerador G1 aumentou aproximadamente 4%. Observe que, neste caso só um indivíduo atuou estrategicamente. A ineficiência causada pelas ações estratégicas pode diminuir caso todos os geradores e cargas atuem.

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Potência Ativa Total Gerada	282,78 MW	282,60 MW
Carga Ativa Total	280,25 MW	280,25 MW
Perda de Potência Ativa nas Linhas	2,53 MW	2,35 MW
Benefício Social	-658,37 \$	-672,56 \$
Benefício Individual (G1)	43,69 \$	45,61 \$

Tabela 4.9: Comparação entre os resultados do AMBS e AMBI - Caso A.

Visando facilitar a leitura do texto a seguir, é interessante relembrar alguns conceitos estabelecidos anteriormente. O benefício individual de um gerador i é dado pela diferença entre o valor recebido pela energia (*Recebimento*) do mercado, e o *custo* de geração real. O gerador i recebe do mercado o custo marginal da barra i multiplicado pela sua potência gerada; isto é,

$$\text{Recebimento} = \lambda_i P g_i$$

Por outro lado, o benefício individual de um consumidor j é dado pela diferença entre o seu benefício de consumo real e o valor pago ao mercado pela energia (*Pagamento*). O consumidor j paga ao mercado o custo marginal da barra j multiplicado pela carga consumida; ou seja,

$$\text{Pagamento} = \lambda_j P d_j$$

Na Tabela 4.10 está a contabilização do benefício individual de G1. Como consequência da estratégia de oferta, o gerador G1 reduziu sua geração de potência ativa em 10,08 MW, o que representa 17% da potência gerada quando se adota o critério maximização do benefício social. Com isso o custo de geração real (considerando o valor da variável de oferta $k = 1$) diminuiu de 161,94 \$ para 128,13 \$, resultando numa considerável economia de custo (aproximadamente 21%). É suposto que G1 recebe do mercado de energia o custo marginal da barra 1 multiplicado pela sua potência gerada. O custo marginal da barra 1 aumentou em 2%, mas apesar do preço da energia ter aumentado, a potência despachada por G1 se reduziu mais significativamente, e o gerador G1 passou a receber cerca de 15,5 % menos do que recebia sem usar estratégia de oferta. Contudo, o benefício de G1 com a estratégia de oferta foi maior, porque a economia de custo na produção de energia foi mais elevada do que a redução do valor recebido pelo mercado.

As tabelas 4.11 e 4.12 apresentam a contabilização dos benefícios individuais dos par-

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Potência Ativa Gerada	59,12 MW	49,04 MW
Custo Marginal da Barra 1	3,478 \$/MW	3,543 \$/MW
Custo de Geração Real	161,94 \$	128,13 \$
Recebimentos	205,63 \$	173,74\$
Benefício Individual (G1)	43,69 \$	45,61 \$

Tabela 4.10: Contabilização do benefício do gerador G1 - Caso A.

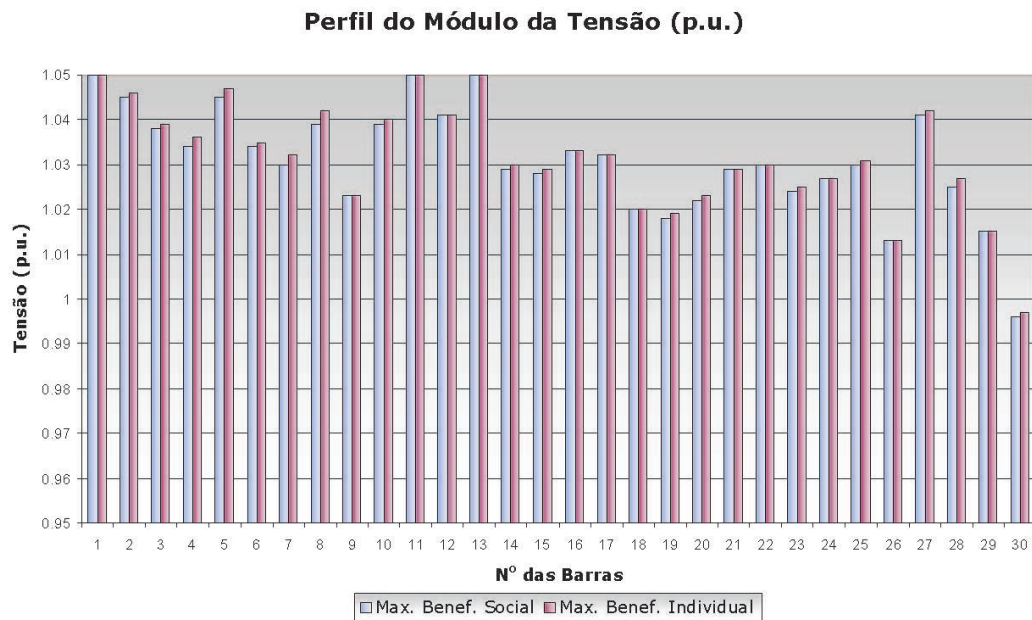
Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	59.12	-5.97	3.48	161.94	205.64	43.69
G2	23.52	8.9	3.52	74.9	82.78	7.88
G5	112.36	21.16	3.53	254.4	396.43	142.04
G8	55.87	33.51	3.56	162.37	199.05	36.67
G11	9.89	13.9	3.6	33.84	35.55	1.71
G13	22.03	7.26	3.55	72.15	78.21	6.07
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C15	4.1	1.25	3.62	8.16	14.83	-6.67
C24	4.35	3.35	3.66	13	15.93	-2.92
C30	15.9	2.85	3.89	80.07	61.93	18.14
Benefício Social (\$) = -658.37						

Tabela 4.11: Maximização do Benefício Social (AMBS) - Caso A.

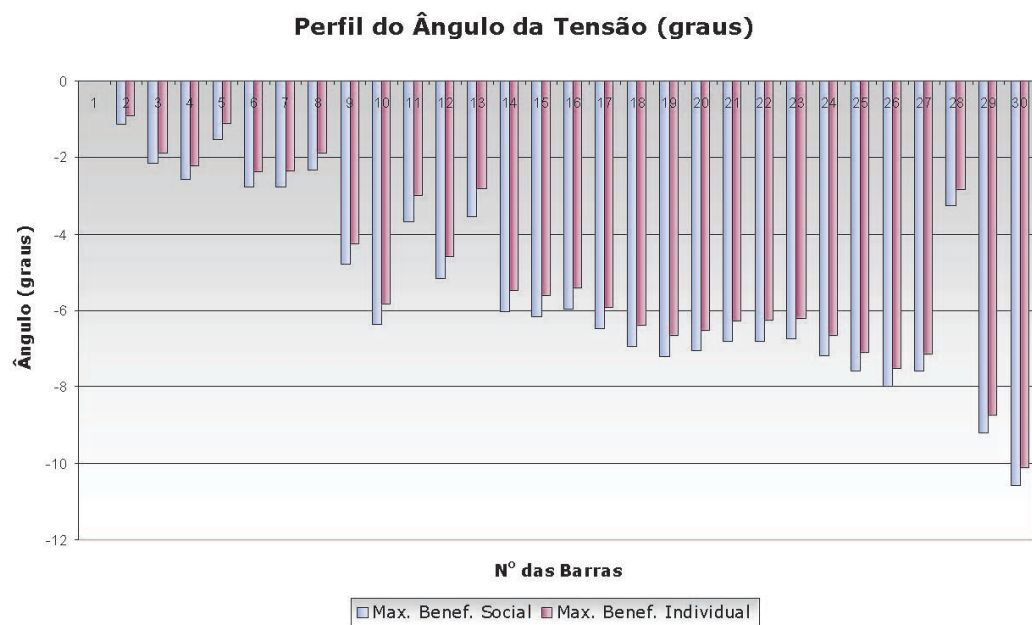
participantes ativos no mercado e do benefício social do sistema, obtidos através do AMBS e do AMBI, respectivamente. Comparando os resultados mostrados nessas tabelas, verifica-se que a estratégia de oferta utilizada por G1, permitiu também que todos os outros geradores aumentassem seu benefício individual. Por outro lado, os consumidores ativos tiveram seu benefício individual reduzido.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	49.03	-5.81	3.54	128.12	173.73	45.61
G2	25.52	8.51	3.58	82.01	91.29	9.28
G5	114.61	21.14	3.58	262.38	410.14	147.77
G8	57.99	33.6	3.61	169.97	209.48	39.51
G11	11.38	13.75	3.65	39.26	41.52	2.27
G13	24.07	6.77	3.6	79.46	86.71	7.24
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C15	4.1	1.25	3.67	8.16	15.04	-6.88
C24	4.35	3.35	3.71	13	16.16	-3.16
C30	15.9	2.85	3.95	80.07	62.85	17.21
Benefício Social (\$) = -659.97						

Tabela 4.12: Maximização do Benefício Individual de G1 (AMBI) - Caso A.

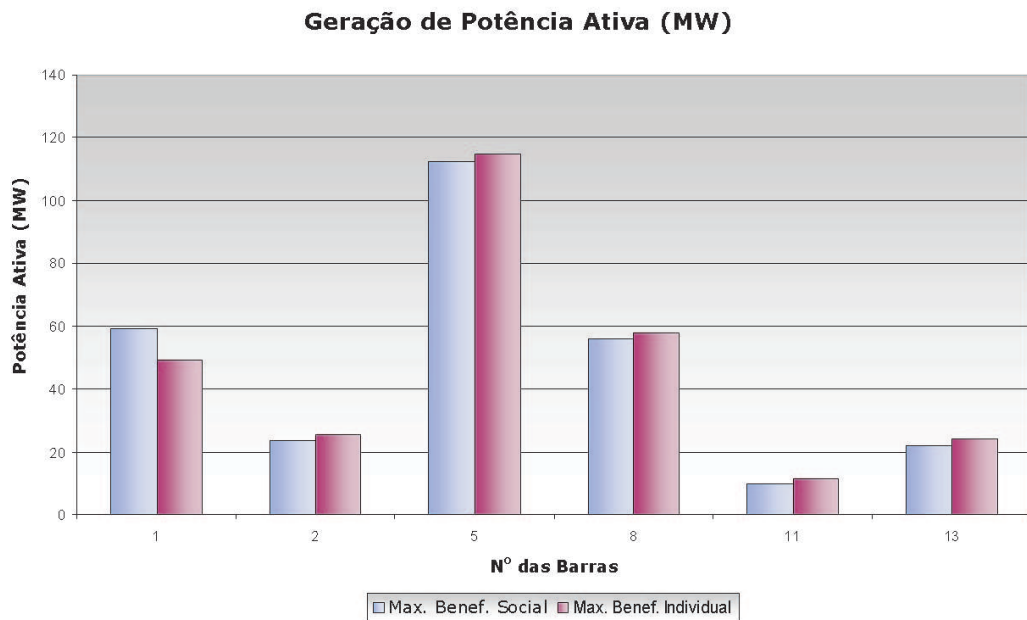


(a) Comparação do módulo da tensão para o sistema de 30 barras.

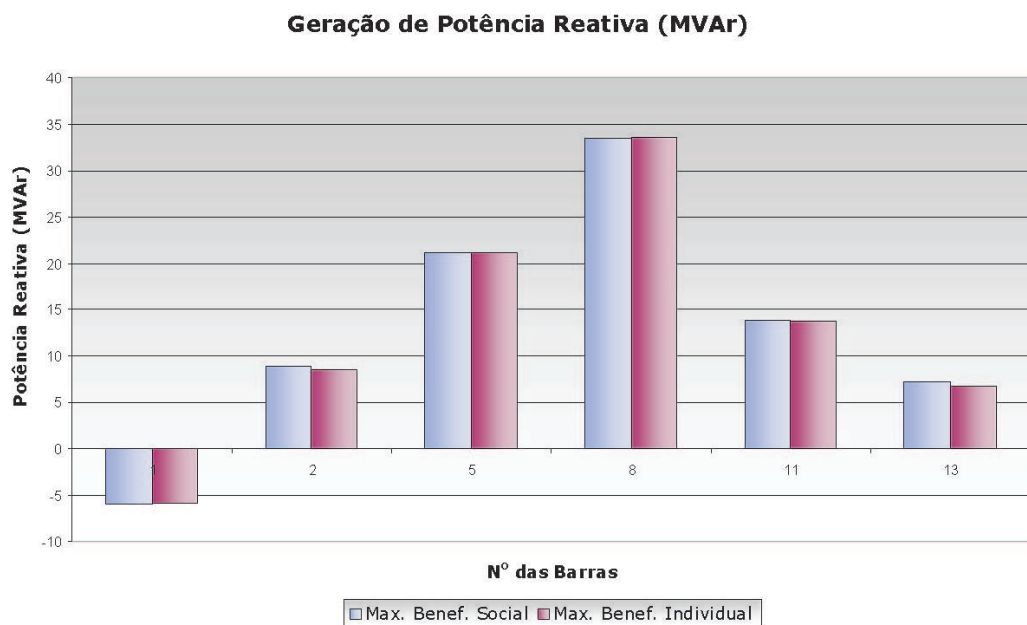


(b) Comparação dos ângulos para o sistema de 30 barras.

Figura 4.12: Tensão e ângulo das barras do sistema de 30 barras - Caso A.

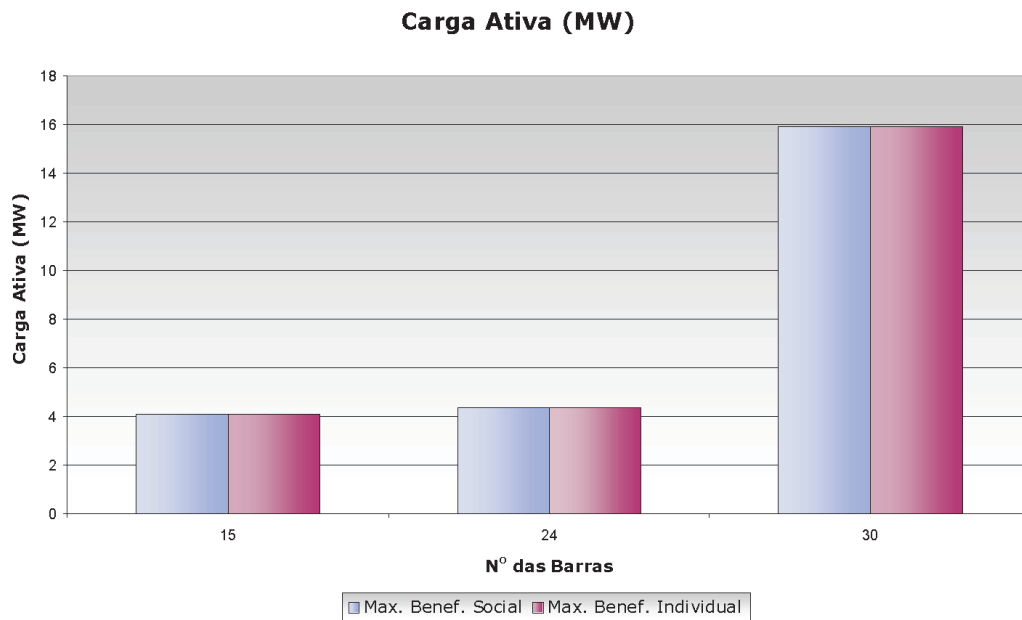


(a) Comparação da geração de potência ativa para o sistema de 30 barras.

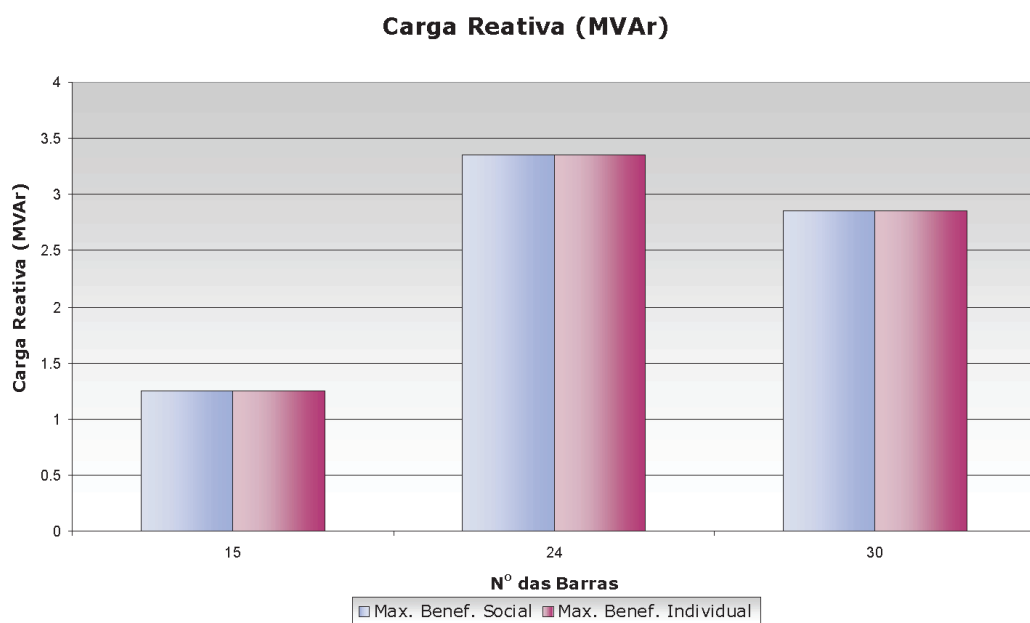


(b) Comparação da geração de potência reativa para o sistema de 30 barras.

Figura 4.13: Potência ativa e reativa dos geradores do sistema de 30 barras - Caso A.



(a) Comparação da carga ativa dos consumidores ativos no sistema de 30 barras.



(b) Comparação da carga reativa dos consumidores ativos no sistema de 30 barras.

Figura 4.14: Carga dos consumidores ativos no sistema de 30 barras - Caso A.

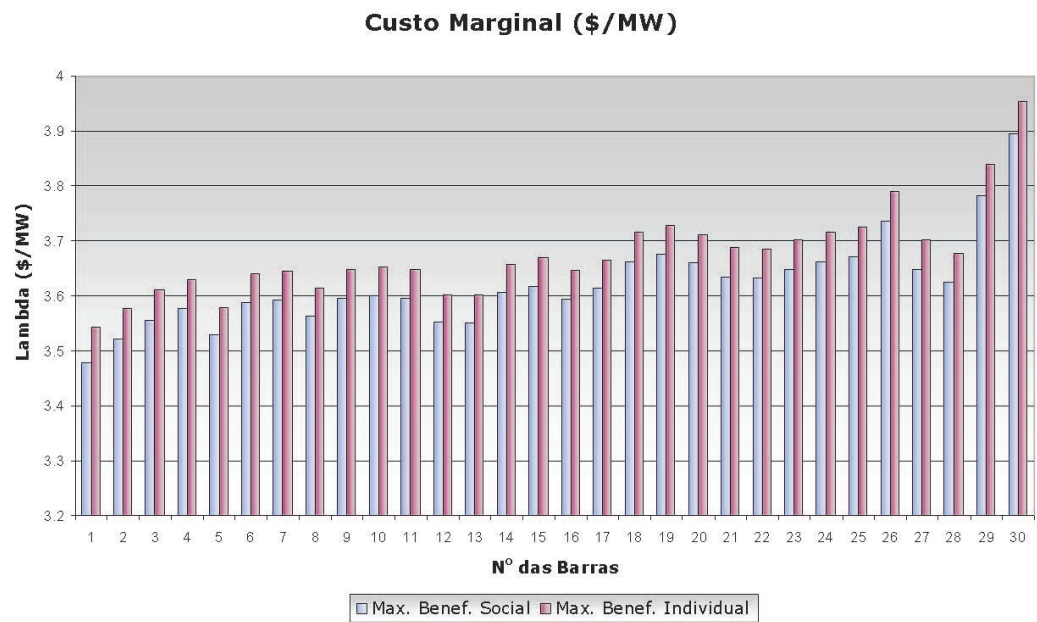


Figura 4.15: Custo marginal de potência ativa - Caso A.

4.4.2 CASO B: Controle sobre os Geradores G1, G2, e Carga C30

Neste caso, será suposto que os geradores G1, G2 e a carga C30 são pertencentes a uma única entidade. Dessa forma, é possível prever que o indivíduo controlador da entidade possuirá um poder de mercado maior, em relação ao caso anterior. Os resultados do AMBI serão novamente comparados com os resultados do AMBS. Nesta simulação, as barras com consumidores ativos poderão reduzir sua carga em até 50%, mas poderão aumentá-la indefinidamente, de acordo com seu benefício.

As ofertas ótimas determinadas pelo AMBI para o conjunto composto pelos participantes G1, G2 e C30, foram $k_{g1} = 1, 1$; $k_{g2} = 1, 0868$; e $k_{d30} = 0, 8916$, respectivamente.

A Figura 4.16(a) mostra o perfil de tensão nas barras do sistema. Pode-se verificar que, de forma geral, houve uma queda do perfil de tensão, exceto nas barras 25, 26, 27, 29 e 30. Como na barra 30 está conectado o consumidor C30 com carga variável, supõe-se que a estratégia de oferta do indivíduo tenha resultado em uma redução considerável da carga C30. Esta redução por sua vez, levou à uma acentuada elevação de tensão na barra 30, e ao aumento do perfil de tensão das barras vizinhas mais próximas.

O ângulo da tensão complexa nas barras do sistema é mostrado na Figura 4.16(b). É importante verificar o ângulo nas barras 1 e 2, onde estão conectadas as unidades geradoras G1 e G2 pertencentes ao indivíduo. A barra 1 é a barra de referência do sistema e portanto seu ângulo é zero tanto no AMBI quanto no AMBS. Entretanto, as aberturas angulares das outras barras em relação à barra 1 se reduziram nos resultados do AMBI, evidenciando uma diminuição de potência ativa enviada ao sistema por G1. O mesmo vale para G2; apesar do ângulo da tensão na barra 2 ter se reduzido, houve uma redução mais significativa dos ângulos nas outras barras do sistema. Isto indica que a potência ativa enviada ao sistema por G2 tenha também se reduzido com o uso da estratégia de oferta.

As figuras 4.17(a) e 4.17(b) mostram a geração de potência ativa e reativa respectivamente, nas barras de geração do sistema. Conforme indicado anteriormente, G1 reduziu sua geração em aproximadamente 9 MW, e G2 reduziu sua geração em 7 MW. Como será visto a seguir, a carga do sistema teve uma redução menor, cerca de 4 MW. Dessa forma, os outros geradores do sistema tiveram que aumentar sua geração para satisfazer o balanço de potência.

A redução de carga no sistema pode ser vista nas figuras 4.18(a) e 4.18(b), que mostram a carga ativa e reativa dos consumidores ativos no mercado. A variação de carga reativa é proporcional a variação de carga ativa, já que é de interesse dos consumidores manter o fator de potência constante. As cargas C15 e C24 não se alteraram com a estratégia de oferta do indivíduo, mantendo-se constantes no limite mínimo de carga. O consumidor C30, como esperado, reduziu sua carga em aproximadamente 4 MW, sendo o único responsável pela redução de carga no sistema.

Os custos marginais de barra do sistema são mostrados na Figura 4.19. Houve um aumento do custo marginal em todas as barras, exceto nas barras 25, 26, 27, 29 e 30, que são as barras mais próximas ao consumidor C30. Nota-se, que os desvios dos custos marginais do AMBI não foram muito acentuados em relação ao AMBS como no Caso A, onde não ocorreram variações na carga dos consumidores ativos. Nesta situação, o redespacho das unidades geradoras pelo AMBI faria com que os custos marginais aumentassem, mas redução de carga do consumidor C30 ajudou a amortecer o impacto do redespacho nos custos marginais do sistema. Obviamente, esta alteração de carga teve como objetivo principal o benefício do indivíduo, e não o suporte ao sistema.

A Tabela 4.13 apresenta os resultados gerais para o índice de maximização do benefício social e maximização do benefício individual. Com o AMBS e com ofertas de custo e benefício verdadeiros, o indivíduo tem um benefício individual de 64,40 \$ e o sistema um benefício social de -644,21 \$, enquanto que, utilizando o AMBI, o indivíduo aumenta seu benefício individual para 81,27 \$ (um aumento de aproximadamente 26 %), e em contrapartida o benefício social se reduz para -684,08 \$, causando uma ineficiência de $-644,21 - (-684,08) = 39,87$ \$ ao sistema.

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Potência Ativa Total Gerada	303,07 MW	297,83 MW
Carga Ativa Total	297,61 MW	293,52 MW
Perda de Potência Ativa nas Linhas	5,46 MW	4,31 MW
Benefício Social	-644,21 \$	-684,08 \$
Benefício Individual (G1, G2 e C30)	64,40 \$	81,27 \$

Tabela 4.13: Comparação entre os resultados do AMBS e AMBI - Caso B.

As tabelas 4.14, 4.15 e 4.16 mostram a contabilização do benefício de cada entidade pertencente ao indivíduo, geradores G1 e G2, e a carga C30 respectivamente. Com o AMBI, o gerador G1 reduziu sua potência gerada, e com isso passou a receber do mercado 27,69 \$ a menos em relação ao AMBS. No entanto, houve uma economia no custo de produção de energia de 31,93 \$, e o benefício individual aumentou em 4,24 \$. A oferta de G2 calculada pelo AMBI, também fez com que sua potência despachada se reduzisse, fazendo com que este gerador recebesse 24,18 \$ a menos em relação ao resultado do AMBS. Porém, o AMBI gerou uma economia de 25,18 \$ no custo de produção de energia de G2, resultando em um aumento de 1 \$ no seu benefício individual. O benefício individual de C30 aumentou bastante em relação ao AMBS, mesmo tendo sua demanda reduzida. A carga C30 teve uma economia de 32,07 \$ no pagamento feito ao mercado, contra uma redução de 20,45 \$ no seu benefício de consumo, resultando em um aumento de 11,62 \$ no seu benefício individual.

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Potência Ativa Gerada	62,25 MW	52,97 MW
Custo Marginal da Barra 1	3,556 \$/MW	3,656 \$/MW
Custo de Geração Real	172,93 \$	141,00 \$
Recebimentos	221,36 \$	193,67 \$
Benefício Individual de G1	48,43 \$	52,67 \$

Tabela 4.14: Contabilização do benefício do gerador G1 - Caso B.

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Potência Ativa Gerada	26,53 MW	19,34 MW
Custo Marginal da Barra 2	3,606 \$/MW	3,697 \$/MW
Custo de Geração Real	85,63 \$	60,45 \$
Recebimentos	95,67 \$	71,49 \$
Benefício Individual de G2	10,04 \$	11,04 \$

Tabela 4.15: Contabilização do benefício do gerador G2 - Caso B.

Os benefícios individuais de todos os participantes ativos e o benefício social do sistema, obtidos utilizando o AMBS e o AMBI, podem ser verificados nas tabelas 4.17 e 4.18, respectivamente. Pelos resultados apresentados nessas tabelas, é possível verificar novamente que todos os geradores puderam aumentar seus benefícios individuais, através da estratégia conjunta de G1, G2 e C30. O gerador G5 particularmente, foi o gerador que obteve mais benefício individual mesmo não utilizando estratégia de oferta. Com exceção de C30, que aumentou significativamente seu benefício individual, as cargas variáveis tiveram uma redução do benefício individual devido ao aumento dos custos marginais de suas barras. Evidencia-se a necessidade de que os consumidores atuem de forma estratégica.

	Max. Benef. Social	Max. Benef. Individual
Carga Ativa Consumida	33,26 MW	29,17 MW
Custo Marginal da Barra 30	4,842 \$/MW	4,422 \$/MW
Benefício de Potência Ativa Real	166,97 \$	146,52 \$
Pagamentos	161,04\$	128,97 \$
Benefício Individual de C30	5,93 \$	17,55 \$

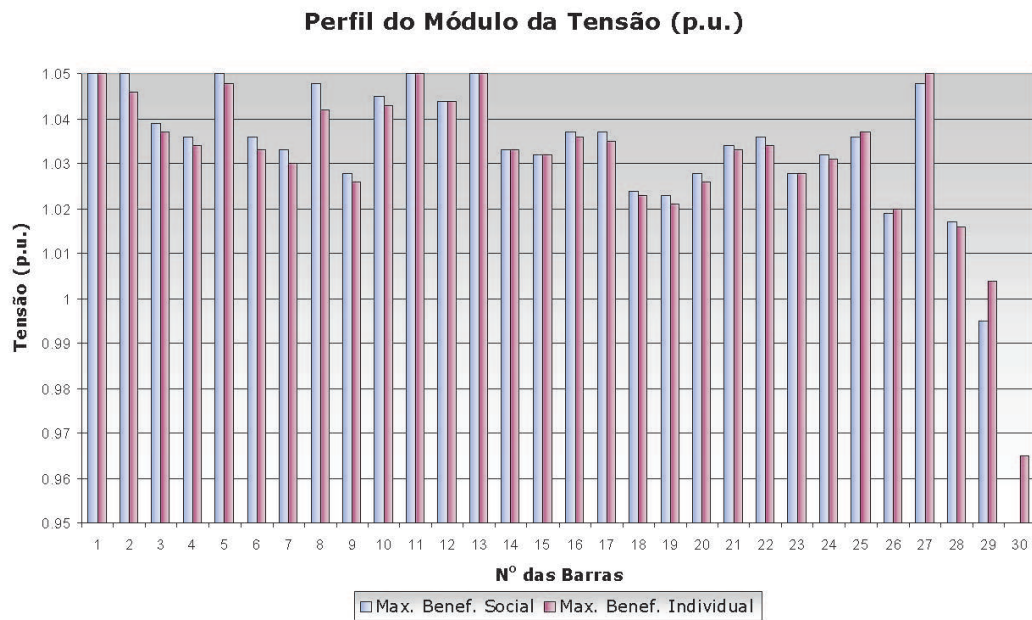
Tabela 4.16: Contabilização do benefício da carga C30 - Caso B.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	62.25	-16.72	3.56	172.93	221.37	48.44
G2	26.53	19.99	3.61	85.63	95.65	10.03
G5	116.01	21.98	3.61	267.4	418.8	151.4
G8	60.34	50	3.67	178.54	221.32	42.78
G11	12.75	11.26	3.7	44.27	47.11	2.84
G13	25.21	4.7	3.63	83.56	91.51	7.94
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C15	4.1	1.25	3.71	8.16	15.22	-7.06
C24	4.35	3.35	3.8	13	16.55	-3.55
C30	33.26	5.96	4.84	166.97	161.03	5.94
Benefício Social (\$) = -644.21						

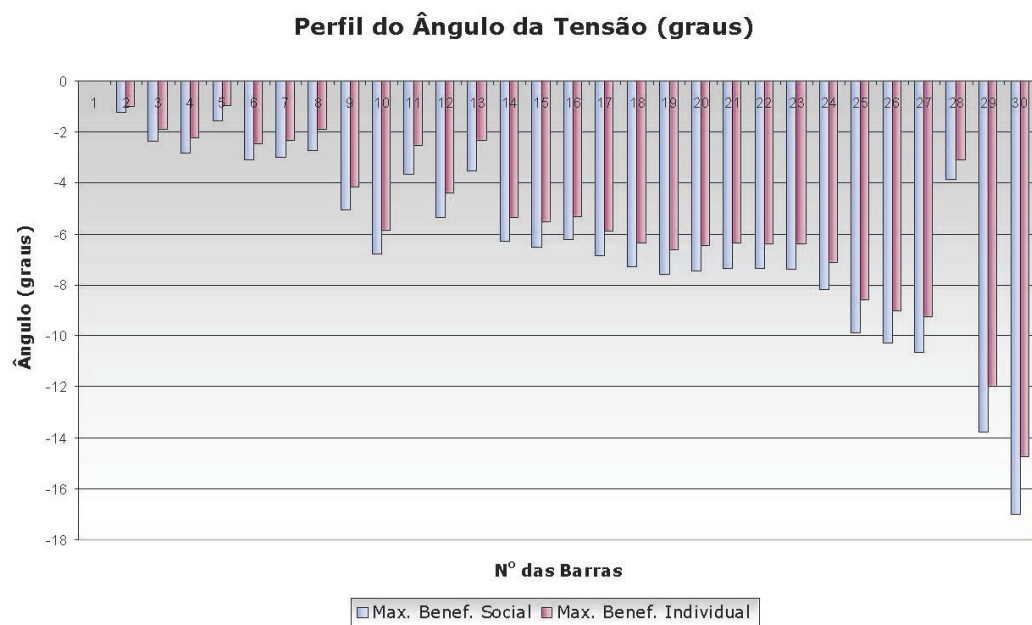
Tabela 4.17: Maximização do Benefício Social (AMBS) - Caso B.

Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	52.97	-5.76	3.66	141	193.67	52.67
G2	19.34	12.03	3.7	60.45	71.49	11.04
G5	119.52	22.89	3.69	280.22	440.93	160.71
G8	62.96	40.29	3.73	188.23	234.81	46.58
G11	14.73	12.53	3.77	51.67	55.47	3.8
G13	28.31	4.88	3.71	94.94	104.96	10.02
Carga	Pd (MW)	Qd (MVar)	λ (\$/MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C15	4.1	1.25	3.78	8.16	15.51	-7.35
C24	4.35	3.35	3.85	13	16.74	-3.74
C30	29.16	5.23	4.42	146.5	128.94	17.56
Benefício Social (\$) = -648.86						

Tabela 4.18: Maximização do Benefício Individual de G1, G2 e C30 (AMBI) - Caso B.

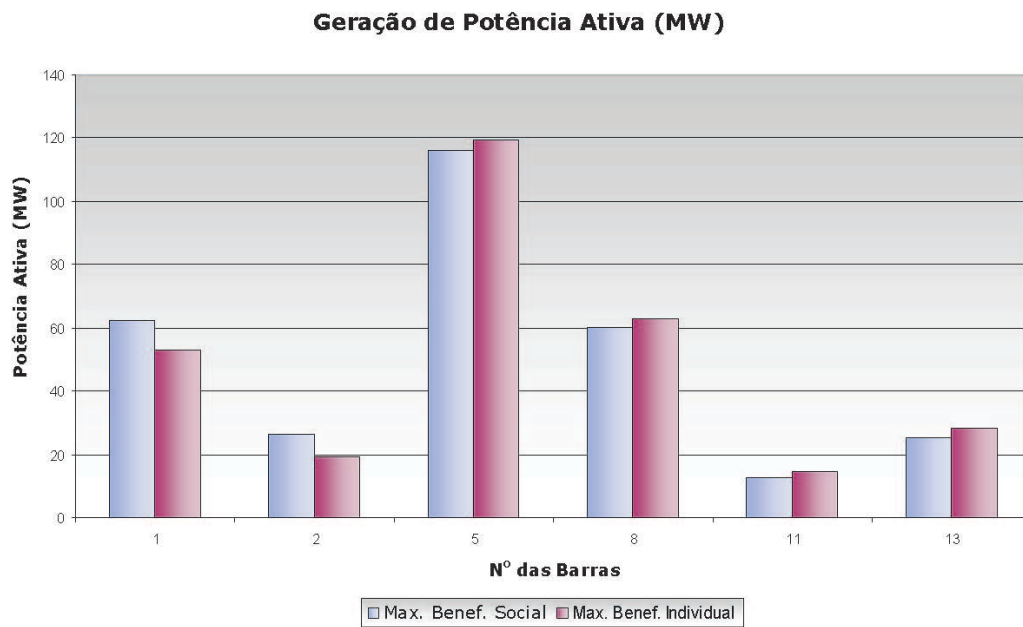


(a) Comparação do módulo da tensão para o sistema de 30 barras.

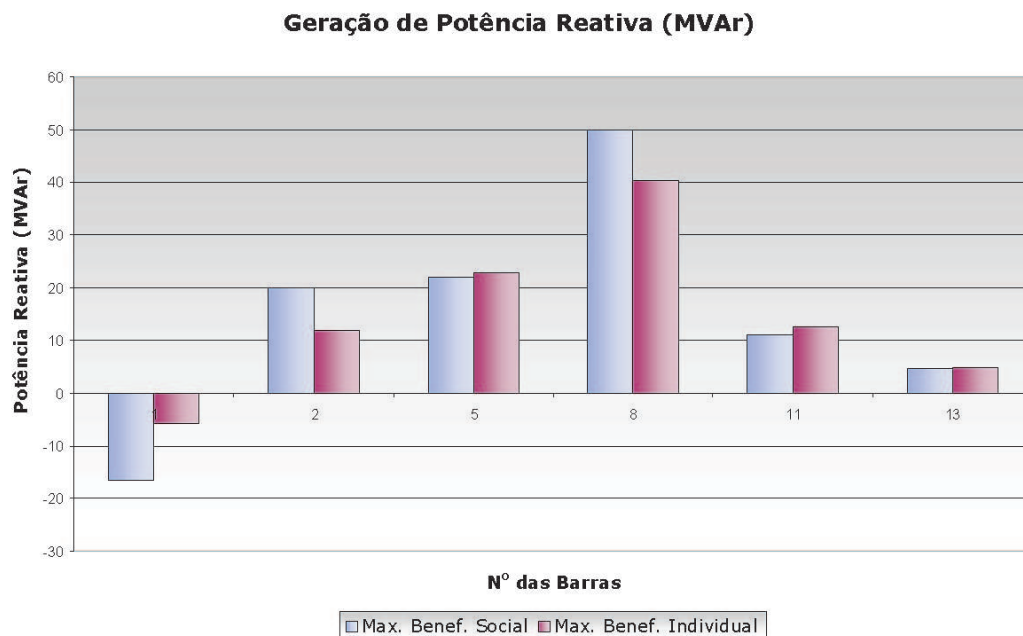


(b) Comparação dos ângulos para o sistema de 30 barras.

Figura 4.16: Tensão e ângulo das barras do sistema de 30 barras - Caso B.

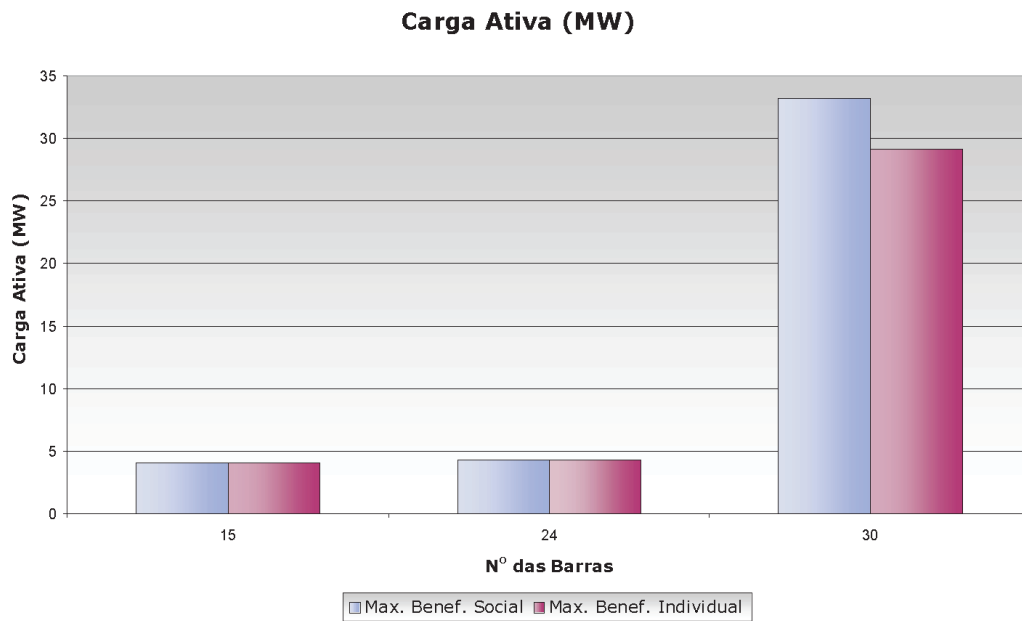


(a) Comparação da geração de potência ativa para o sistema de 30 barras.

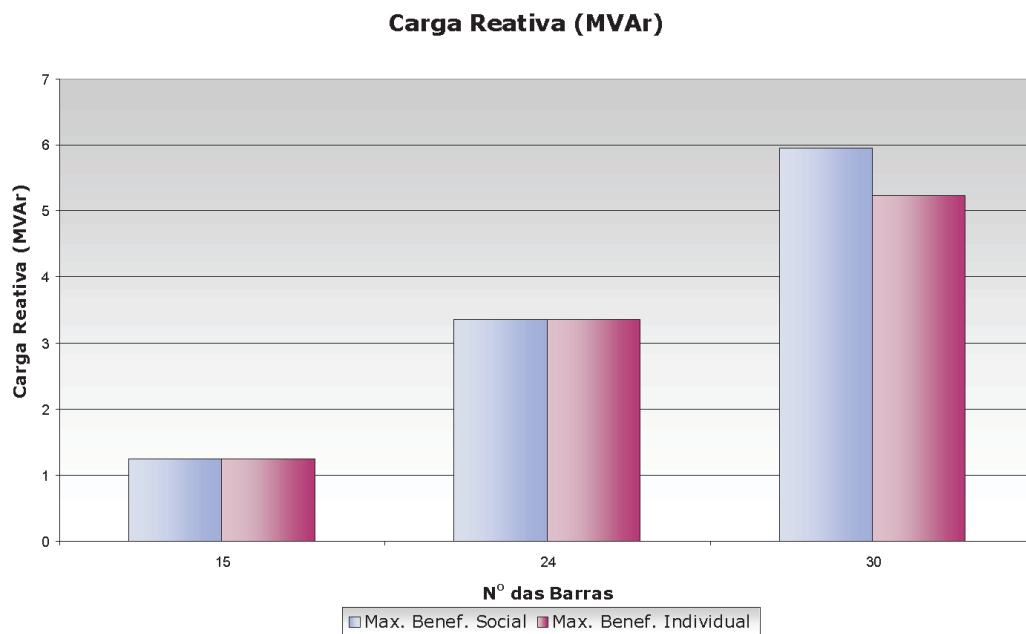


(b) Comparação da geração de potência reativa para o sistema de 30 barras.

Figura 4.17: Potência ativa e reativa dos geradores do sistema de 30 barras - Caso B.



(a) Comparação da carga ativa dos consumidores ativos no sistema de 30 barras.



(b) Comparação da carga reativa dos consumidores ativos no sistema de 30 barras.

Figura 4.18: Carga dos consumidores ativos no sistema de 30 barras - Caso B.

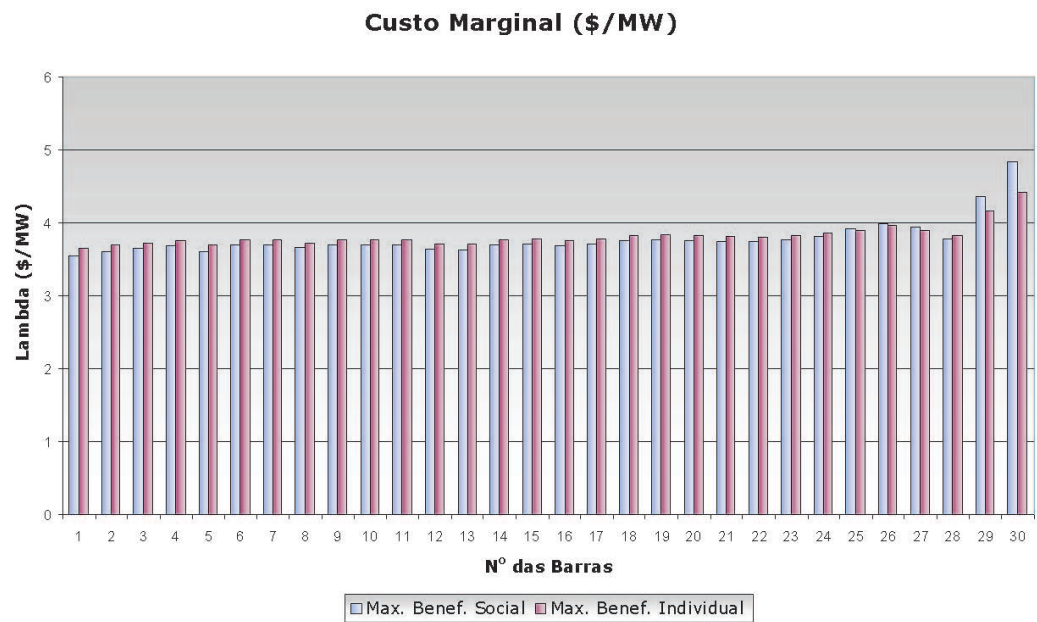


Figura 4.19: Custo marginal de potência ativa - Caso B.

4.4.3 CASO C: Equilíbrio de Nash entre G1 e G2

Neste caso, G1 e G2 são considerados dois participantes independentes no mercado de energia. Ambos utilizam o AMBI para produzirem suas ofertas. Dessa forma, o Algoritmo de Busca do Equilíbrio de Nash (ABEN) foi utilizado para encontrar um ponto de equilíbrio entre os dois participantes. Estes participantes iniciam suas ofertas com o valor real da função de custo ($k_{g1} = k_{g2} = 1$), e a partir deste ponto duas situações foram consideradas:

1. G1 faz a primeira alteração de oferta.
2. G2 faz a primeira alteração de oferta.

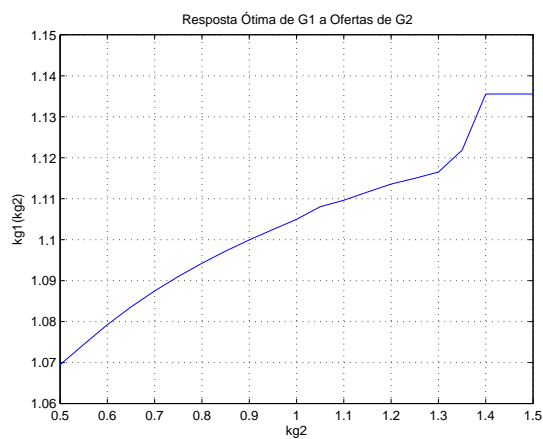
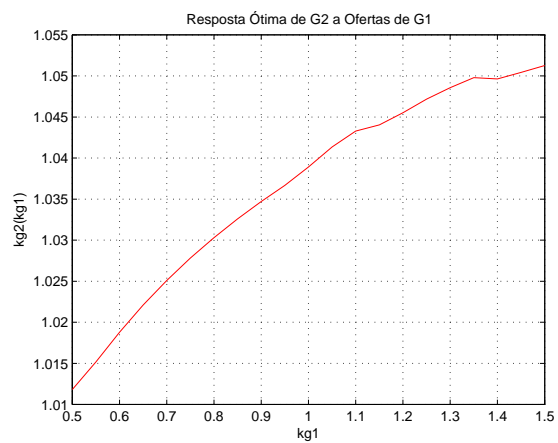
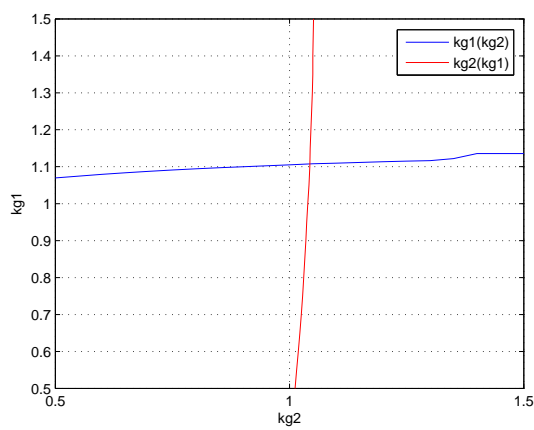
Utilizando o ABEN, o Equilíbrio de Nash é encontrado, independentemente de quem toma a iniciativa no jogo, com as ofertas $k_{g1} = 1,1075$ e $k_{g2} = 1,0434$. Neste ponto, não é interessante para G1 e nem para G2 alterar sua oferta.

O gráfico 4.20(a) mostra as ofertas ótimas do gerador G1, calculadas pelo AMBI, em resposta às ofertas de G2. Da mesma forma, o gráfico 4.20(b) mostra as ofertas ótimas de G2, em resposta às ações de G1. O gráfico 4.20(c) é obtido fazendo a superposição de 4.20(a) e 4.20(b) no mesmo plano cartesiano. E é possível verificar que o ponto de Equilíbrio de Nash é encontrado no ponto onde essas duas curvas se cruzam. Em 4.20(d) é feita uma aproximação no ponto de cruzamento dessas curvas, de forma a verificar que este é o ponto calculado pelo ABEN.

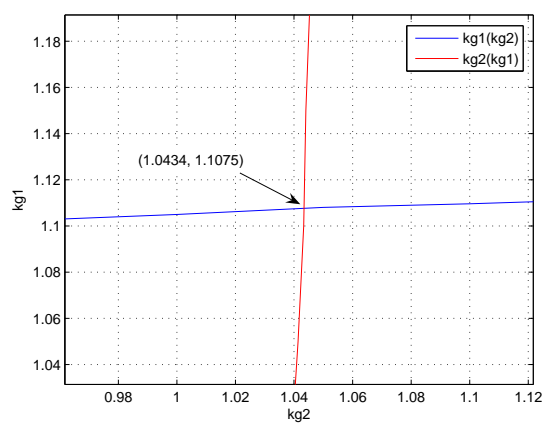
Gerador	Pg (MW)	Qg (MVar)	λ (\$/MW)	Custo (\$)	Recebimento (\$)	Benef. Individual (\$)
G1	52.04	-13.95	3.66	137.92	190.27	52.35
G2	24.32	19.89	3.7	77.76	89.93	12.18
G5	119.58	20.89	3.69	280.45	441.33	160.87
G8	63.6	50	3.74	190.62	238.15	47.53
G11	15.05	10.23	3.78	52.87	56.83	3.96
G13	28.4	2.98	3.71	95.3	105.38	10.09
Carga	Pd (MW)	Qd (Mvar)	λ (\$/MW)	Benefício (\$)	Pagamento (\$)	Benef. Individual (\$)
C15	4.1	1.25	3.79	8.16	15.55	-7.39
C24	4.35	3.35	3.88	13	16.89	-3.89
C30	33.38	5.98	4.86	167.57	162.35	5.22
Benefício Social (\$) = -646.19						

Tabela 4.19: Ponto de Equilíbrio de Nash entre G1 e G2 (ABEN) - Caso C.

A Tabela 4.19 mostra os resultados obtidos para os participantes ativos no mercado no ponto de equilíbrio determinado. Com relação a Tabela 4.18, verifica-se que, mesmo competindo entre si, G1 e G2 conseguiram aumentar seus benefícios individuais em relação ao caso sem estratégias de oferta.

(a) $k_{g1}(k_{g2})$.(b) $k_{g2}(k_{g1})$.

(c) Superposição dos gráficos 4.20(a) e 4.20(b).



(d) Aproximação no gráfico 4.20(c).

Figura 4.20: Determinação do Equilíbrio de Nash.

4.5 Conclusão

Neste capítulo, foram feitas simulações de dois casos principais. No primeiro, um determinado indivíduo (formado por um conjunto de participantes ativos no mercado) utiliza ofertas estratégicas calculadas pelo Algoritmo de Maximização do Benefício Individual (AMBI). No segundo, nenhuma ação estratégica é utilizada pelos participantes ativos. A análise dessas simulações mostra que:

- o uso do AMBI para modelar a oferta mostrou-se eficiente, trazendo benefícios econômicos para o participante que o utiliza. Um aspecto interessante é que a estratégia modelada pelo AMBI pode beneficiar indiretamente, e até de forma mais significativa, os participantes que não utilizam estratégias de oferta. Nas simulações realizadas, de um modo geral, a estratégia escolhida por um gerador produzia benefícios para todos os outros geradores.
- a oferta escolhida por um determinado participante altera a curva de benefício individual dos outros participantes. Portanto, quando dois indivíduos competem no jogo de ofertas, é possível obter um benefício maior do que quando apenas um participante utiliza estratégia de oferta, como pôde ser visto na seção 4.3.3.
- Com base nas figuras 4.2, 4.5, 4.6 e 4.11, é possível verificar que, pelo menos para os casos em que o indivíduo é composto por apenas um participante ativo, o AMBI é capaz de determinar o ponto ótimo global.

O capítulo a seguir, apresenta as conclusões e as sugestões para a continuidade deste trabalho.

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas e discutidas as principais conclusões referentes a todos os aspectos abordados no decorrer desta dissertação. Ao final do capítulo, serão sugeridas algumas melhorias para o trabalho produzido, juntamente com idéias para trabalhos futuros.

5.2 Conclusões

Esta dissertação apresenta dois focos principais: O problema de otimização em dois níveis e o estudo das estratégias de oferta em um modelo de mercado com a participação dos consumidores.

A modelagem em dois níveis é adequada sempre que existe um nível hierárquico nas tomadas de decisão. No setor elétrico, essa estrutura é encontrada com frequência, pois existem diversas entidades (geradores, consumidores, operador, agentes reguladores) que interagem entre si. Destas, as mais conhecidas são os agentes de regulação, agentes de operação, companhias de geração e os diversos tipos de consumidores. Portanto, o modelo de otimização em dois níveis possui grande aplicabilidade nos sistemas elétricos.

A técnica de descida mostrou-se eficaz para solucionar o problema de otimização em dois níveis. Caso fosse utilizado um método de substituição do problema de nível inferior pelas condições de KKT, o número de variáveis aumentaria muito, assim como o grau de complexidade das equações. Em contrapartida, o método de descida necessita de dois laços iterativos (interno e externo), resultando em um maior número total de iterações.

Os resultados obtidos nas simulações mostram que, mesmo com a reestruturação do setor elétrico, ainda é possível que determinados agentes exerçam poder de mercado através das

estratégias de oferta. Os principais motivos que levam o mercado de energia a esta situação são o alto investimento para a entrada novos agentes geradores, a inelasticidade da demanda frente aos preços em tempo real e os limites de transmissão (David e Wen, 2001).

Mesmo nos casos em que esse poder de mercado é limitado, gerando apenas uma pequena margem de lucro, as simulações realizadas mostram que uma pequena mudança na oferta original de um indivíduo pode mudar significativamente o ponto de operação do sistema, podendo gerar problemas no perfil de tensão e grandes desvios no despacho de geradores e cargas.

No presente trabalho, os limites de transmissão não foram modelados, entretanto, seus efeitos no sistema são conhecidos. Weber e Overbye (1999) e Weber e Overbye (2002) mostram que, nos jogos de oferta, os limites de transmissão podem levar a situações onde não há um ponto de equilíbrio de Nash, ou a casos onde existem vários pontos de equilíbrio. A inclusão de limites de transmissão no algoritmo implementado e seus efeitos no sistema são sugeridos como estudos futuros.

Nos casos simulados utilizando o AMBI, é suposta a *informação perfeita* dos concorrentes, e o máximo benefício individual é encontrado, de forma geral, com uma oferta próxima aos custos e benefícios reais do indivíduo. Nota-se portanto que, a determinação da melhor oferta feita por um indivíduo no sistema depende muito de uma informação precisa das ofertas dos seus concorrentes. Para o operador do sistema é interessante manter em sigilo essas informações. Porém, um indivíduo pode utilizar dados históricos e técnicas de estatística para estimar o comportamento e as ofertas dos concorrentes. O operador por outro lado, poderia utilizar os mesmos dados históricos para verificar se algum tipo de abuso está sendo realizado pelos participantes do mercado.

5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Os seguintes tópicos podem ser desenvolvidos como continuidade do presente trabalho:

1. Inclusão de limites de potência nas linhas de transmissão no algoritmo implementado.
2. Aplicação de técnicas para trabalhar com a esparsidade das matrizes obtidas na solução do problema.
3. Inclusão das ofertas de disponibilidade de geração no problema de nível superior, de forma que o mesmo tivesse controle sobre as ofertas de custo e benefício (\mathbf{k}_g e \mathbf{k}_d), e sobre os limites de geração e carga (\mathbf{P}_{gmin} , \mathbf{P}_{dmin} , \mathbf{P}_{gmax} e \mathbf{P}_{dmax}). Essas informações seriam enviadas de forma estratégica ao operador no nível inferior, com o objetivo de melhorar o benefício individual do usuário do AMBI.

4. Estudo sobre a aplicabilidade de implementação de um estimador de ofertas dos participantes do mercado. Esse estimador forneceria os dados de entrada para o AMBI de um indivíduo.
5. Implementação de outros objetivos para o problema de nível superior, fora do âmbito do mercado de energia. O indivíduo pode ter outros objetivos além do seu benefício econômico como, por exemplo, minimizar o desvio de potência despachada por um gerador em relação à um valor especificado.

Apêndice A

Método Primal-Dual de Pontos Interiores

A principal característica dos Métodos de Pontos Interiores, é a sua capacidade de percorrer uma trajetória interior à região viável do problema até a convergência do processo, fornecendo, em cada iteração, soluções que satisfazem todas as equações de desigualdade. Duas versões são mais frequentemente utilizadas: o algoritmo primal-dual convencional e o algoritmo preditor-corretor. Suas principais diferenças estão relacionadas a forma de tratar as condições de complementaridade, aspectos que podem afetar consideravelmente a convergência do processo iterativo (Castronuovo, 1997).

O Método de Pontos Interiores utilizado no trabalho e apresentado neste apêndice, é aquele associado ao conceito de dualidade (Primal-Dual).

Matematicamente, o problema de fluxo de potência ótimo é formulado como:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\ & && \mathbf{h}^m \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^M \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde:

\mathbf{x} é um vetor n-dimensional que corresponde às variáveis de otimização;

$f(\mathbf{x})$ é a função objetivo do problema de otimização;

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é um vetor m-dimensional cujas componentes correspondem as equações de igualdade do problema de otimização;

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é um vetor l-dimensional cujas componentes correspondem as equações de desigualdade do problema de otimização;

\mathbf{h}^m é um vetor 1-dimensional cujas componentes representam os limites inferiores de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$;

\mathbf{h}^M é um vetor 1-dimensional cujas componentes representam os limites superiores de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Utilizando o Método Primal-Dual de Pontos Interiores o problema A.1 pode ser resolvido através dos passos descritos a seguir.

- Transformação das restrições de desigualdade em restrições de igualdade através da inserção de variáveis de folga.

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M &= \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u &> \mathbf{0}\end{aligned}\tag{A.2}$$

onde, \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u são vetores cujos componentes (s_{l_i} e s_{u_i}) são as variáveis de folga correspondentes às restrições de desigualdade;

- Adição da função barreira logarítmica função objetivo;

$$f(\mathbf{x}) - \mu[\sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i}]\tag{A.3}$$

- Aplicação das condições de otimalidade no problema resultante, que agora é expresso como,

$$\begin{aligned}\text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) - \mu[\sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i}] \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M = \mathbf{0} \\ & \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u > \mathbf{0}\end{aligned}\tag{A.4}$$

A função Lagrangeana do problema expresso na equação (A.4) é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = & f(\mathbf{x}) - \mu[\sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i}] - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ & - \boldsymbol{\pi}_l^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m] - \boldsymbol{\pi}_u^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M]\end{aligned}\tag{A.5}$$

onde todos os termos foram definidos anteriormente.

A aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker à equação (A.5) fornece:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \\ \nabla_{\mathbf{s}_l} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = \mu \mathbf{e}_l - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \nabla_{\mathbf{s}_u} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = \mu \mathbf{e}_u + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_l} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m] \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_u} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) &= \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M]\end{aligned}\tag{A.6}$$

onde, $\nabla_x f(\mathbf{x})$ e $\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})$ são os vetores gradientes de $f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, respectivamente; $\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$; \mathbf{e}_l e \mathbf{e}_u são vetores unitários de dimensão adequada; e \mathbf{S}_l e \mathbf{S}_u são matrizes diagonais formadas pelos elementos dos vetores \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u , respectivamente.

As condições expressas pela equação (A.6) são acrescidas das restrições de não negatividade, correspondentes às variáveis de folga, e de sinal, relativas aos multiplicadores duais; dessa forma,

$$\mathbf{s}_l \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_u \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}_l \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}_u \leq \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

O ponto estacionário do problema representado pela equação (A.4) é obtido resolvendo-se a equação (A.6). Utilizando-se o método de Newton-Raphson, o seguinte sistema de equações não-lineares deve ser resolvido a cada iteração:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \Delta \mathbf{x} - \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u) &= -\mathbf{t} \\ -\boldsymbol{\Pi}_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l &= -(\mu \mathbf{e}_l - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) \\ \boldsymbol{\Pi}_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u &= -(\mu \mathbf{e}_u + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) \\ -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}_l &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s}_u &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{lj} + \pi_{uj}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x})$$

é a matriz de segundas derivadas da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização; $\nabla_x^2 f(\mathbf{x})$, $\nabla_x^2 g_i(\mathbf{x})$, e $\nabla_x^2 h_j(\mathbf{x})$ são as matrizes de segundas derivadas de $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ e $h_j(\mathbf{x})$, respectivamente;

$$\mathbf{t} = \nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = \nabla_x f(\mathbf{x}) - \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u)$$

e $\boldsymbol{\Pi}_l$ e $\boldsymbol{\Pi}_u$ são matrizes diagonais formadas pelos elementos dos vetores $\boldsymbol{\pi}_l$ e $\boldsymbol{\pi}_u$, respectivamente.

A equação (A.8) pode ser re-escrita na forma matricial, resultando em

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \\ -(\mu \mathbf{e}_l - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l) \\ -(\mu \mathbf{e}_u + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^m \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^M \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

com a matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u)$ dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t & -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t & -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Pi}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_u \\ -\mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade. Note que esta matriz, originalmente não simétrica, pode se tornar simétrica multiplicando-se a segunda linha por $-\mathbf{S}_l^{-1}$ e a segunda linha por $-\mathbf{S}_u^{-1}$.

A solução da equação (A.8) fornece os incrementos nas variáveis primais e duais do problema de otimização. A não violação das restrições de não-negatividade das variáveis de folga e de sinais dos multiplicadores duais é assegurada, calculando-se o comprimento do passo nos espaços primal e dual como,

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \min \left[\min_{\Delta s_{l_i} < 0} \frac{s_{l_i}}{|\Delta s_{l_i}|}, \min_{\Delta s_{u_i} < 0} \frac{s_{u_i}}{|\Delta s_{u_i}|}, 1, 0 \right] \\ \gamma_d &= \min \left[\min_{\Delta \pi_{l_j} < 0} \frac{\pi_{l_j}}{|\Delta \pi_{l_j}|}, \min_{\Delta \pi_{u_j} > 0} \frac{-\pi_{u_j}}{|\Delta \pi_{u_j}|}, 1, 0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A atualização das variáveis primais e duais é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \sigma \gamma_p \Delta \mathbf{x}^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \sigma \gamma_d \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \mathbf{s}_l^{k+1} &= \mathbf{s}_l^k + \sigma \gamma_p \Delta \mathbf{s}_l^k & \boldsymbol{\pi}_l^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_l^k + \sigma \gamma_d \Delta \boldsymbol{\pi}_l^k \\ \mathbf{s}_u^{k+1} &= \mathbf{s}_u^k + \sigma \gamma_p \Delta \mathbf{s}_u^k & \boldsymbol{\pi}_u^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_u^k + \sigma \gamma_d \Delta \boldsymbol{\pi}_u^k \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde, σ é uma constante cuja finalidade é garantir que as variáveis \mathbf{s} e $\boldsymbol{\pi}$ não se anulem, usualmente utiliza-se para a mesma o valor de 0,9995.

Portanto, a finalidade dos fatores de passo $\sigma \gamma_p$ e $\sigma \gamma_d$ é garantir a não negatividade das variáveis de folga e assegurar uma redução suficiente na função de mérito representada pela função Lagrangeana.

O valor do parâmetro barreira é computado ao final de cada iteração utilizando-se a equação

$$\mu = \frac{\mathbf{s}_l^t \boldsymbol{\pi}_l - \mathbf{s}_u^t \boldsymbol{\pi}_u}{2l\beta} \quad (\text{A.13})$$

onde l é o número restrições de desigualdade e β é um número maior que 1, tipicamente é utilizado $\beta = 10$.

O algoritmo para a resolução de um problema de otimização via método de Pontos Interiores versão Primal-Dual é sumarizado nos passos descritos a seguir.

1. Inicialização das variáveis primais e duais;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana aumentada (equação (A.6));
3. Teste de convergência: comparação da norma euclidiana do vetor gradiente e do valor do parâmetro barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência for satisfeito, o processo iterativo é encerrado;
4. Cálculo da matriz \mathbf{W} e solução do sistema linear (equação (A.9));
5. Determinação dos comprimentos dos passos nos espaços primal e dual (equações A.11);
6. Atualização das variáveis de otimização (equação (A.12));
7. Cálculo do novo valor do parâmetro barreira μ (equação (A.13)). Retorno ao passo (2).

Apêndice B

Dados do Sistema de 30 Barras

Linha	De	Para	R	X	B	a	amin	amax
1	1	2	1.92	5.75	5.28	0	0	0
2	1	3	4.52	18.52	4.08	0	0	0
3	2	4	5.7	17.37	3.68	0	0	0
4	2	5	4.72	19.83	4.18	0	0	0
5	2	6	5.81	17.63	3.74	0	0	0
6	3	4	1.32	3.79	0.84	0	0	0
7	4	6	1.19	4.14	0.9	0	0	0
8	4	12	0	25.6	0	1.032	0.9	1.1
9	5	7	4.6	11.6	2.04	0	0	0
10	6	7	2.67	8.2	1.7	0	0	0
11	6	8	1.2	4.2	0.9	0	0	0
12	6	9	0	20.8	0	1.078	0.9	1.1
13	6	10	0	55.6	0	1.069	0.9	1.1
14	6	28	1.69	5.99	1.3	0	0	0
15	8	28	63.6	20	4.28	0	0	0
16	9	10	0	11	0	0	0	0
17	9	11	0	20.8	0	0	0	0
18	10	17	3.24	8.45	0	0	0	0
19	10	20	9.36	20.9	0	0	0	0
20	10	21	3.48	7.49	0	0	0	0
21	10	22	7.27	14.99	0	0	0	0
22	12	13	0	14	0	0	0	0
23	12	14	12.31	25.59	0	0	0	0
24	12	15	6.62	13.04	0	0	0	0
25	12	16	9.45	19.87	0	0	0	0
26	14	15	22.1	19.97	0	0	0	0
27	15	18	10.7	21.85	0	0	0	0
28	15	23	10	20.2	0	0	0	0
29	16	17	8.24	19.32	0	0	0	0

30	18	19	6.39	12.92	0	0	0	0
31	19	20	3.4	6.8	0	0	0	0
32	21	22	1.16	2.36	0	0	0	0
33	22	24	11.5	17.9	0	0	0	0
34	23	24	13.2	27	0	0	0	0
35	24	25	18.85	32.92	0	0	0	0
36	25	26	25.44	38	0	0	0	0
37	25	27	10.93	20.87	0	0	0	0
38	28	27	0	39.6	0	1.068	0.9	1.1
39	27	29	21.98	41.53	0	0	0	0
40	27	30	32.02	60.27	0	0	0	0
41	29	30	23.99	45.33	0	0	0	0

Tabela B.1: Dados de Linha do Sistema-Teste de 30 Barras.

Barra	Tipo	Tensão	Ângulo	Pg	Qg	Qgmin	Qgmax	Pd	Qd	Shunt	dPd	dQd
1	2	1.04	0	0	0	-9999	9999	0	0	0	0	0
2	1	1.05	0	0	0	-10	20	21.7	12.7	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	2.4	1.2	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	7.6	1.6	0	0	0
5	1	1.01	0	0	0	-20	50	94.2	19	0	0	0
6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	22.8	10.9	0	0	0
8	1	1.01	0	20	0	-20	50	30	30	0	0	0
9	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	5.8	2	19	0	0
11	1	1.05	0	20	0	-20	50	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	11.2	7.5	0	0	0
13	1	1.05	0	20	0	-25	25	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	6.2	1.6	0	0	0
15	4	0	0	0	0	0	0	8.2	2.5	0	0.82	0.25
16	0	0	0	0	0	0	0	3.5	1.8	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	9	5.8	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	3.2	0.9	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	9.5	3.4	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	2.2	0.7	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	17.5	11.2	0	0	0
22	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	3.2	1.6	0	0	0
24	4	0	0	0	0	0	0	8.7	6.7	4	0.87	0.67
25	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	3.5	2.3	0	0	0

27	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	2.4	0.9	0	0	0
30	4	0	0	0	0	0	0	10.6	1.9	0	1.06	0.19

Tabela B.2: Dados de Barra do Sistema-Teste de 30 Barras.

Barra	Vmin	Vmax	Pgmin	Pgmax	bg	cg	bd	cd	kg	kd	rhomin	rhomax
1	0.9	1.05	0	200	200	250	0	0	0.8	0	0	0
2	0.9	1.05	0	300	285	285	0	0	0	0	0	0
3	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.9	1.05	0	140	100	225	0	0	0	0	0	0
6	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0.9	1.05	0	140	225	235	0	0	0	0	0	0
9	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0.9	1.05	0	140	325	350	0	0	0	0	0	0
12	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0.9	1.05	0	140	300	250	0	0	0	0	0	0
14	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0.9	1.05	0	0	0	0	200	50	0	0	-5	5
16	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0.9	1.05	0	0	0	0	300	50	0	0	-5	5
25	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0.9	1.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0.9	1.05	0	0	0	0	505	18	0	0	-5	5

Tabela B.3: Dados de Limites e Oferta do Sistema-Teste de 30 Barras.

Referências Bibliográficas

- Arroyo, J. M. e Galiana, F. D. (2005). On the solution of the bilevel programming formulation of the terrorist threat problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2):789–797.
- Bard, J. F. (1991). Some properties of the bilevel programming problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 68(2):371–378.
- Bard, J. F. (1998). *Practical Bilevel Optimization: Applications and Algorithms*. Kluwer Academic Press, Reading, 1 edição.
- Barroso, L. A., Carneiro, R. D., Granville, S., Pereira, M. V., e Fampa, M. H. C. (2006). Nash equilibrium in strategic bidding: A binary expansion approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(2):629–638.
- Borenstein, S. e Bushnell, J. (2000). Electricity restructuring: Deregulation or reregulation? *The Cato Review of Business and Government Regulation*, 23(2):46–52.
- Castronuovo, E. D. (1997). *Solução de Fluxo de Potência Ótimo via Método de Pontos Interiores, com Aplicação de Computação de Alto Desempenho*. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina.
- Colson, B., Marcotte, P., e Savard, G. (2005). Bilevel programming: A survey. *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, 3(2):87–107.
- da Costa, W. U. (2002). *Modelagem de Efeitos Intertemporais no Fluxo de Potência Ótimo: Abordagem do Gerenciamento pelo Lado da Demanda*. Tese (doutorado em engenharia elétrica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina.
- David, A. K. e Wen, F. (2000). Strategic bidding in competitive electricity markets: a literature survey. Em *Power Engineering Society Summer Meeting, 2000. IEEE*, volume 4, páginas 2168–2173, Seattle, WA, USA.
- David, A. K. e Wen, F. (2001). Market power in electricity supply. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 16(4):352–360.

- Edmunds, T. A. e Bard, J. F. (1991). Algorithms for nonlinear bilevel mathematical programs. *IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics*, 21(1):83–89.
- Falk, J. E. e Liu, J. (1995). On bilevel programming, part i: General nonlinear cases. *Mathematical Programming: Series A and B*, 70(1):47–72.
- Fortuny-Amat, J. e MacCarl, B. (1981). A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. *Journal of the Operational Research Society*, 32(9):783–792.
- Herskovits, J. e Leontiev, A. (2003). An interior point technique for solving bilevel programming problems. *Operations Research Letters*, 1(1):1–7.
- Lamont, J. W. e Rajan, S. (1997). Strategic bidding in an energy brokerage. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(4):1729–1733.
- Nash, J. (1950). *Non-Cooperative Games*. Tese (ph. d), Princeton University, Elizabeth, New Jersey.
- Silva, E. L. (2001). *Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica*. Sagra Luzzatto, Reading, 1 edição.
- Torres, G. L. (2004). Smooth, non-smooth and Jacobian smoothing nonlinear complementarity methods for solving optimal power flows. Em *Anais do CBA 2004 - Congresso Brasileiro de Autômática 2004*, volume 1, páginas 1–6, Gramado, RS, Brasil.
- Weber, J. D. e Overbye, T. J. (1999). A two-level optimization problem for analysis of market bidding strategies. Em *Proceedings of IEEE Power Engineering Society Summer Meeting 1999*, volume 2, páginas 682–687, Edmonton, Alta., Canada.
- Weber, J. D. e Overbye, T. J. (2002). An individual welfare maximization algorithm for electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(3):590–596.
- Weber, J. D., Overbye, T. J., e DeMarco, C. L. (1999). Modeling the consumer benefit in the optimal power flow. *Decision Support Systems*, 24(3-4):279–296.